RAZISKOVALNA NALOGA

ALI JE POKONČNA PIRAMIDA RES POKONČNA?

Neskladja v gimnazijskih učbenikih za matematiko

Področje: matematika

Avtorja: **Maja Križnič, Lenart Žežlina**

Mentor: Alojz Grahor

Vipava, marec 2018

Škofijska gimnazija Vipava

Zahvala

Iskreno se zahvaljujeva profesorju Alojzu Grahorju za spodbude in usmerjanje pri izdelavi raziskovalne naloge in profesorici Sonji Matelič za pregled prevoda povzetka v angleščino.

Hvala tudi profesorjema dr. Iztoku Baniču in dr. Urošu Milutinoviču s Fakultete za matematiko in naravoslovje Univerze v Mariboru za čas in poglobljeno uvajanje v raziskovanje temeljnih matematičnih konceptov.

Povzetek

V nalogi smo odkrivali nedoslednosti v slovenskih gimnazijskih učbenikih za matematiko in raziskovali matematične probleme, povezane z odkritimi neskladji. Podrobno smo pregledali učbenike založbe DZS (Matematika 1, 2, 3 in 4), založbe Modrijan (LINEA nova, PLANUM novum, SPATIUM novum in TEMPUS novum) ter založbe ZRSS (VEGA 1, 2 in 3). Nedoslednosti smo iskali znotraj samih učbenikov (neskladja med definicijami, besedili nalog in njihovimi rešitvami) ter med omenjenimi učbeniki, v katerih se definicije določenih matematičnih pojmov razlikujejo. Odkrili in opisali smo dvajset neskladij. Ugotovili smo, da so nekatera neskladja takšna, da lahko prinesejo različno vrednotenje dijakovih izdelkov ob upoštevanju definicij iz različnih učbenikov. Za vsak opisani problem smo predlagali ustreznejšo matematično definicijo. Raziskava je pokazala, da bi bilo potrebno poiskati še morebitna druga neskladja, poenotiti definicije ter napisati slovenski matematični terminološki slovar.

Ključne besede: nedoslednosti, matematični učbeniki, definicije matematičnih pojmov

Abstract

The aim of the research paper was to detect the inconsistencies in Slovenian secondary school mathematics textbooks and investigate the mathematical problems related to certain inconsistencies. Our research was limited to the mathematics textbooks of the following publishers: DZS (Matematika 1, 2, 3 and 4), Modrijan (LINEA nova, PLANUM novum, SPATIUM novum and TEMPUS novum) and ZRSS (VEGA 1, 2 and 3). Imperfections were found both within the textbooks themselves (insufficient definitions and instructions, solutions not matching the definitions, etc.) and among the listed textbooks (various definitions of the same concept). Approximately twenty inconsistences were detected and described, concluding that some of them may affect the assessment of students' answers, even when it comes to the Matura exam. A more suitable definition was suggested for each detected imperfection. The results show that there may be other flaws in Slovenian textbooks that need to be discovered. We also think that mathematical definitions should be standardized and collected in a Dictionary of Technical Terms.

Key words: inconsistencies, mathematics textbooks, mathematical definitions

Kazalo

POVZETEK 2
1. UVOD 4
2. MATEMATIČNA NESKLADJA 5
2.1. Ali je pokončna piramida zares pokončna? 5
2.2. Kaj je ulomek? 7
2.3. Kako določimo mediano, kako kvartile? 9
2.4. Problem točnega rezultata in zaokroževanja 11
2.5. Kaj je kot? 13
2.6. Kaj je vektor? 15
2.7. Ali je definicijsko območje funkcije enolično določeno? 17
2.8. Kdaj je funkcija naraščajoča na intervalu, kdaj v točki? 18
2.9. Kako je definirana eksponentna funkcija? 21
2.10. Ali kompleksne ničle polinoma res nastopajo v konjugiranih parih? 22
2.11. Kako definiramo racionalno funkcijo? 24
2.13. Definicija geometrijskega zaporedja 26
2.14. Ali se graf racionalne funkcije približuje polu? 27
2.15. Ali so poli racionalne funkcije točke nezveznosti? 29
2.16. Kaj je to stacionarna točka? 31
2.17. Kaj je nedoločeni integral: funkcija ali družina funkcij? 33
2.18. Nedoločeni integral funkcije, ki ima pole 35
2.19. Ali lahko tangenta na krivuljo v dotikališču seka krivuljo? 36
3. ZAKLJUČEK 37
4. VIRI IN LITERATURA 38
Kazalo slik 39

1. UVOD

Matematika kot znanstvena veda že sama po sebi zahteva oblikovanje jasnih definicij. Srednješolci pričakujemo, da so temeljni koncepti v vseh učbenikih enako obravnavani. Med šolanjem smo ob uporabi učbenikov različnih založb opazili določena neskladja. Na določena neskladja so opozarjali tudi naši profesorji. Odločili smo se, da bi v raziskovalni nalogi sistematično pregledali učbenike za matematiko v gimnaziji.

Pri raziskovanju smo se omejili na učbenike založbe DZS (Matematika 1, 2, 3 in 4), založbe Modrijan (LINEA nova, PLANUM novum, SPATIUM novum in TEMPUS novum) ter založbe ZRSS (VEGA 1, 2 in 3). Zanimala so nas tako neskladja med nalogami in njihovimi rešitvami v posameznem učbeniku kot neskladja med učbeniki vseh izbranih založb. Za cilj smo si zadali predlagati ustrezne pobude za odpravo odkritih neskladij.

Cilji raziskovalne naloge so:

- poiskati čim več neskladij znotraj učbenikov (neskladja med teorijo in nalogami),
- poiskati čim več neskladij med definicijami temeljih pojmov med posameznimi učbeniki,
- predlagati pobude, kako neskladja poenotiti.

Uporabili smo metodo primerjanja in analiziranja. Rešitve smo iskali s pomočjo matematičnega znanja, primerjanja z rešitvami v slovenski visokošolski literaturi in primerjanjem s tujimi viri, pa tudi s pogovori strokovnjaki s področja matematike.

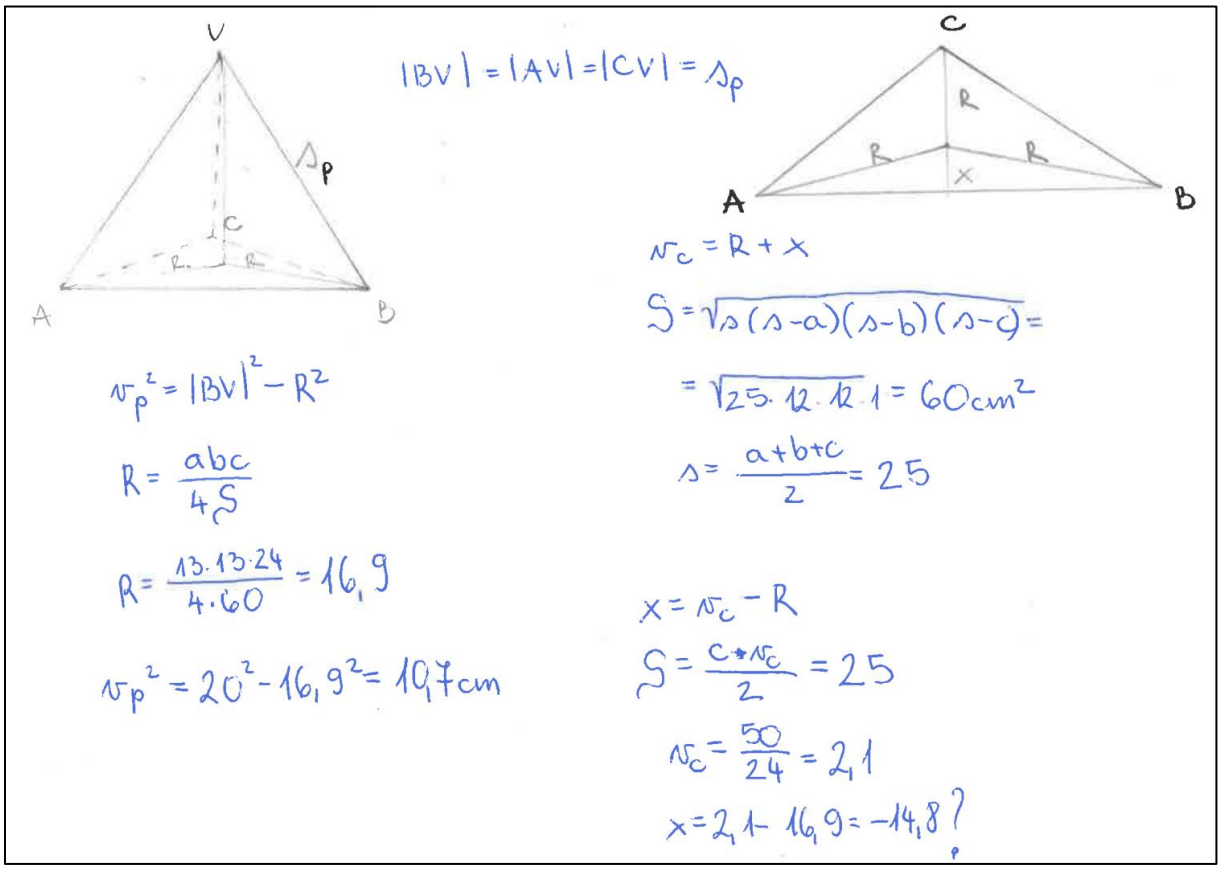
Zaradi tekočega pisanja in branja smo v besedilu uporabili imena učbenikov namesto strogega navajanja vira, in sicer navedeno je ime učbenika, v oklepaju pa vir iz seznama literature:
LINEA nova (Pavlič, 2011), PLANUM novum (Pavlič, 2012), SPATIUM novum (Pavlič, 2013), TEMPUS novum (Pavlič, 2014), MATEMATIKA 1 (Bon Klanjšček, 2009), MATEMATIKA 2 (Bon Klanjšček, 2010), MATEMATIKA 3 (Bon Klanjšček, 2011), MATEMATIKA 4 (Bon Klanjšček, 2012), VEGA 1 (Mohorčič, 2014), VEGA 2 (Ivanec, 2014) in VEGA 3 (Škrlec, 2015).

2. MATEMATIČNA NESKLADJA

2.1. Ali je pokončna piramida zares pokončna?

V tem razdelku bomo preiskovali koncept »pokončne piramide«. Za prikaz smo sestavili nalogo v izzivu 1, ki bi lahko bila zastavljena v kateremkoli gimnazijskem učbeniku, pa tudi kot naloga za preverjanje ali ocenjevanje znanja.

Izziv 1: Izračunaj višino tristrane pokončne piramide $ABCV$, ki ima osnovno ploskev trikotnik ABC s stranicami *a = 13 cm*, *b = 13 cm*, *c = 24 cm*, vrh v točki V, dolžina stranskega roba BV pa je *20 cm*. Nariši skico. Izračunaj višino piramide. Koliko je nožišče višine oddaljeno od najdaljše stranice osnovne ploskve?



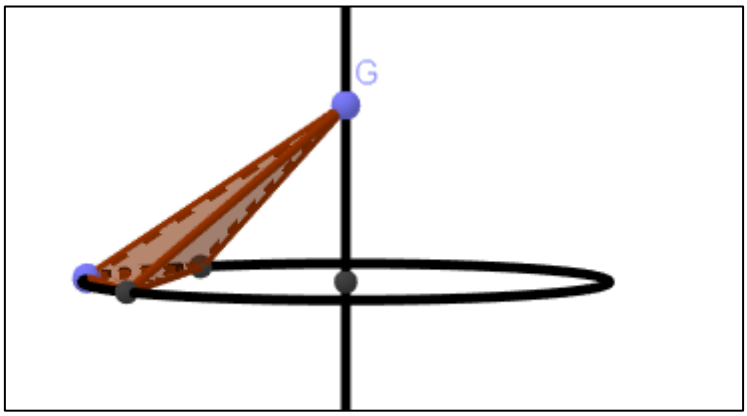
Slika 1 Dijakovo reševanje naloge iz izziva 1

Komentar: Definicija pokončne piramide v učbeniku za gimnazije SPATIUM novum (Pavlič, 2013) je:

»*Piramida je pokončna, če so vsi stranski robovi enako dolgi, sicer je poševna.*«

Smiselno enaka definicija je v učbeniku VEGA 3. V učbeniku MATEMATIKA 3 ni definicije pokončne piramide.

Piramida, ki je opisana v izzivu 1, je po zgornji definiciji pokončna, čeprav ji na videz ne bi pripisali te lastnosti. Njen vrh leži nad središčem očrtane krožnice (glej sliko 2), zato se je reševalec srečal s težavo, ki je ni znal razvozlati (glej sliko 1).



Slika 2 *»Pokončna« piramida iz izziva 1*

V literaturi (Wikipedija, 2017) smo zasledili tudi definicijo: »Pokončna piramida je piramida, ki ima vrh točno nad središčem osnovne ploskve. Za središče osnovne ploskve se pri tem po navadi vzame središče očrtane krožnice. Taka definicija pokončne piramide pomeni, da so vsi stranski robovi piramide enako dolgi. Žal središče očrtane krožnice ne obstaja vedno, zato nekateri matematiki za središče osnovne ploskve izberejo tudi kakšno drugo točko, npr. težišče. Posledično izraz pokončna piramida ni povsem enolično definiran.«

Če vzamemo za središče osnovne ploskve težišče, se izognemo prejšnjemu problemu. Piramida iz izziva 1 ni pokončna (v tem smislu), temveč poševna, saj leži težišče trikotnika vedno v notranjosti trikotnika. Vendar tudi tukaj ni vse tako enostavno. Če se omejimo samo na konveksne osnovne ploskve (takšne so običajno v nalogah), ni vedno enostavno določiti težišča lika. Če ne vemo, kje leži težišče, potem ne moremo določiti, ali ima piramida vrh nad težiščem.

Glede na ta pregled bi bila bolj smiselna definicija s težiščem. Sicer pa predlagamo tri možnosti.

Prva pobuda: Domnevamo, da je bil razlog za dosedanjo definicijo ta, da so vsi stranski robovi enako dolgi. Drug pogled na koncept »pokončnosti piramide« pa je, da opazujemo lego osnovne ploskve, ko piramido »obesimo za vrh«: če je osnovna ploskev vodoravna, je piramida pokončna. V tem primeru leži vrh piramide nad težiščem. Predlagamo naslednjo definicijo pokončne piramide:

DEFINICIJA pokončne piramide: Piramida je pokončna, kadar projekcija vrha piramide na ravnino osnovne ploskve sovpada s težiščem osnovne ploskve, sicer je piramida poševna.

Dodatek: Težišče konveksnih likov z ravnimi stranicami lahko izračunamo po formuli: $T(\frac{x1+x2+\cdots+xn)}{n}, \frac{y1+y2+\cdots+yn}{n})$, kjer je n element množice naravnih števil in pomeni število oglišč konveksnega večkotnika. Oglišča konveksnega večkotnika imajo koordinate zapisane v obliki $A(a_1, a_{2,\cdots,}a_n)$.

Po tej definiciji bi bila piramida iz izziva 1 poševna.

Druga pobuda: Ne definiramo niti pokončne niti poševne piramide. Na naloge to ne vpliva. Vsakič rešujemo nalogo z danimi podatki. Če bi hoteli krajše opisati piramido z enakimi stranskimi robovi (to je takrat, ko leži vrh nad središčem osnovni ploskvi očrtane krožnice), bi ji lahko rekli *enakostranskoroba piramida.* Sklepamo, da so se avtorji učbenika MATAMATIKA 3 zavedali težav z definicijo pokončne piramide in definicije niso vključili v učbenik. Vprašanje o definiciji pokončne piramide tudi ni vključeno v Predmetni izpitni katalog za matematiko (Benko, 2016).

Tretja pobuda: Po vizualnem občutku, kdaj je na primer steber poševen, bi bilo smiselno za pokončno piramido »prepovedati« takšne lege stranskih robov, ki so nagnjeni navzven. To bi dosegli z naslednjo definicijo:

DEFINICIJA pokončne piramide: Piramida je pokončna, kadar se projekcija vrha piramide na ravnino osnovne ploskve nahaja na osnovni ploskvi, sicer je piramida poševna.

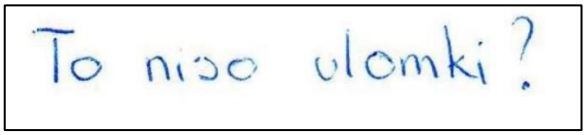
Po tej definiciji bi bila piramida iz izziva 1 poševna.

2.2. Kaj je ulomek?

Ulomek je zelo natančno definiran v povezavi z racionalnimi števili. Pojem ulomka in pojma delov ulomka števec in imenovalec, se uporabljajo tudi pri obravnavi drugih matematičnih tem. Poglejmo si tipično nalogo, ki presega obravnavo ulomkov v množici racionalnih števil.

Izziv 2: Racionaliziraj imenovalce ulomkov:

a) $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{56}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{2a}{\sqrt[3]{4a}}$



Slika 3 Odgovor dijaka ob reševanju naloge iz izziva 2

Komentar: Dijak, ki je reševal nalogo v izzivu 2 (glej sliko 3), ima seveda prav. Definicija ulomka v obravnavanih učbenikih je nedvoumna: »Ulomek je izraz oblike $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b celi števili in $b \neq 0$,« zato je njegova pripomba upravičena.

V učbeniku VEGA 2 pa je ob definiciji pod gumbom Več o ulomkih zapisano: »Pomen ulomka bomo pozneje razširili tako, da bodo v števcu in imenovalcu nastopali tudi izrazi ali koreni« (Ivanec, 2014, str. 203). Tako je dijakova dilema v izzivu 4 odpravljena. Res pa je tudi, da se v nalogah niti ne omenja pojma ulomek, temveč se govori o racionalizaciji imenovalca. Seveda je v teh primerih pojem ulomka samo prikrit.

Prva pobuda: V gimnazijskih učbenikih je potrebno ob definiciji ulomka zapisati tudi, da bo kasneje pojem ulomka razširjen tako, da bodo v števcu in imenovalcu nastopali številski in algebrskimi izrazi. Učitelji običajno imenujejo te ulomke *algebrski ulomki,* da jih ločijo od racionalnih števil. Vendar moramo biti pri uporabi pojma *algebrski* pazljivi, ker je ta pojem povezan z *algebrskimi števili.* Algebrska števila so namreč števila, ki so rešitev neke polinomske enačbe oblike:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0$$

kjer je n > 0 in so koeficienti a_i cela števila (ali enakovredno racionalna števila), ne vsa enaka 0 (Wikipedia). Torej so tudi običajni ulomki s celimi števili algebrski ulomki.

Druga pobuda: Verjetno pa bi bila še boljša pot, da ulomek definiramo kot način zapisa, in sicer kot števec in imenovalec, ločena z ulomkovo črto. Števec in imenovalec bi lahko tako bila poljubna A in B, tudi koreni in izrazi (z neničelnim imenovalcem). Sledimo lahko procesu, ki ga poznamo, ko iz množice celih števil dobimo racionalna števila. Če v množici, ki ima enake lastnosti kot cela števila (glede seštevanja in množenja), sestavljamo ulomke (kot zapise $\frac{A}{B} = AB^{-1}$), dobimo novo strukturo. Pri tem procesu je treba definirati, kdaj sta dva ulomka $\frac{A}{B}$ in $\frac{C}{D}$ enaka (ekvivalentna): $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$.

Po predlagani definiciji ulomka bi bili v nasprotju s prejšnjim pojmovanjem ulomki tudi:

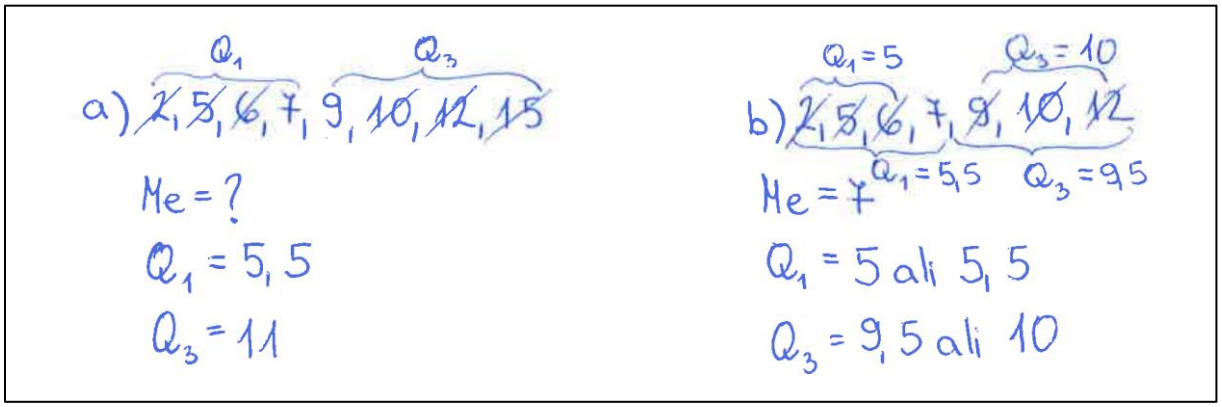
$\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$, saj so to zapisi elementov v »novih množicah«.

2.3. Kako določimo mediano, kako kvartile?

V učbenikih za matematiko so poglavja, ki obravnavajo osnovne pojme iz statistike. Opazili smo, da se tako pri definicijah kot pri računanju mediane uporabljajo različni načini. Razumljivo je, da so začetni primeri prikazani na manjših množicah podatkov, zato pa je neenotnost pri načinih računanja mediane še bolj izrazita. Poglejmo primer, ki smo ga sestavili sami in poskušali rešiti s pomočjo navodil v obravnavanih učbenikih.

Izziv 3: Izračunaj mediano ter prvi in tretji kvartil statističnih spremenljivk:

a) 2, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15
b) 2, 5, 6, 7, 9, 10, 12



Slika 4 Primer nepopolne rešitve naloge iz izziva 3

Komentar: V učbenikih LINEA nova in MATEMATIKA 1 je mediana definirana kot podatek, ki leži na sredini vseh po velikosti urejenih podatkov. V primeru sodega števila podatkov je mediana enaka aritmetični sredini srednjih dveh podatkov, to pa seveda ni eden izmed podatkov. Pri reševanju izziva 3 so bile težave pod točko a) (glej sliko 4). Podobno se zgodi pri računanju kvartilov, če jih definiramo kot mediane leve oziroma desne polovice. Pri lihem številu podatkov imamo še dodatni problem, ker je slabo definirano, ali mediano štejemo k polovicam ali ne. Dijak je za vsak slučaj pustil v primeru b) kar obe možnosti (glej sliko 4). V učbeniku VEGA 1 je mediana definirana kot vrednost, v primeru lihega števila podatkov pa za izračun ostalih dveh

kvartilov štejejo mediano k obema polovicama. Izziv 3 bi bil glede na učbenik VEGA 1 rešljiv brez problemov

Prva pobuda: Ker so kvartili slabo in neenotno definirani v obravnavanih učbenikih, predlagamo enoten pristop. Problem ni tako zanemarljiv, saj se že na osnovnošolskem nivoju pojavljajo sodobnejše grafične predstavitve s »škatlami z brki« (in seveda na srednješolskem tudi), za kar pa so podatki o mediani in kvartilih ključni. Problem določanja kvartilov izhaja iz tega, da skušamo definirati vrednosti kvartilov na majhnem številu podatkov (pri velikem številu podatkov teh problemov ni ali pa so veliko manjši). Predlagamo, da se definicija mediane ter prvega in tretjega kvartila poda enotno, in sicer tako, kot je v statistiki. Za računanje kvartilov pa naj se uporabi eno izmed preprostejših metod.

DEFINICIJA: Mediana je takšno realno število $Me \in R$, za katerega velja, da je vsaj polovica podatkov manjših ali enakih Me in najmanj polovica podatkov večjih ali enakih Me.

Prvi kvartil je takšno realno število $Q_1 \in R$, za katerega velja, da je vsaj ena četrtina podatkov manjših ali enakih Q_1 in vsaj tri četrtine podatkov večjih ali enakih Q_1.

Tretji kvartil je takšno realno število $Q_3 \in R$, za katerega velja, da je vsaj tri četrtine podatkov manjših ali enakih Q_3 in vsaj četrtina podatkov večjih ali enakih Q_3.

Druga pobuda: Predlagamo, da se za metodo določanja kvartilov enotno izbere metodo, ki je uporabljena v učbeniku VEGA 1: **Pri lihem številu podatkov je mediana srednji podatek. Pri sodem številu podatkov je mediana povprečna vrednost srednjih dveh podatkov. Prvi kvartil je mediana leve polovice podatkov, tretji kvartil pa mediana desne polovice podatkov. Pri lihem številu podatkov štejemo mediano k levi polovici in k desni polovici podatkov.**

Ob tem pa naj se v učbenikih zapiše opombo, da je postopkov za izračun kvartilov več in da bodo dijaki v različni literaturi in statističnih programih srečali drugačne postopke.

Tretja pobuda. V članku J. Žerovnika v Matematičnem obzorniku (Žerovnik, 2017) (glej tudi članek Erica Langforda (Langford, 2006)) je analiziranih nekaj metod za računanje kvartilov. Glede na primerjavo rezultatov z definicijo najmanj odstopa metoda, ki je imenovana Langfordova metoda. Predlagamo, da se za računaje kvartilov v matematičnih učbenikih enotno uporablja prav **Langfordova metoda**, ki vsebuje dve pravili:

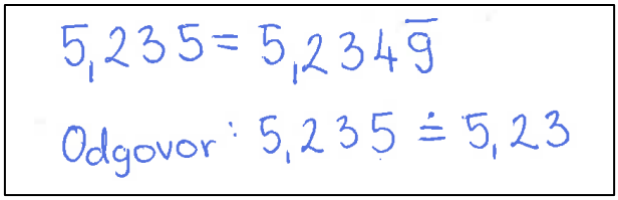
- V primeru, da je vseh podatkov liho število, je mediana srednji podatek. Z vključitvijo ali izključitvijo mediane dosežemo, da je v obeh polovicah liho število podatkov. Prvi kvartil je srednji podatek (mediana) leve polovice, tretji kvartil pa srednji podatek (mediana) desne polovice.

- Ob sodem številu podatkov je mediana povprečje srednjih dveh podatkov. Prvi kvartil je mediana leve polovice podatkov, tretji pa mediana desne polovice podatkov.

2.4. Problem točnega rezultata in zaokroževanja

Matematično načelo je, da so rezultati matematičnih nalog prikazani v točni obliki, kar pomeni, da niso prikazani s približki števil. Ker pa je velikokrat potrebno rezultat naloge prikazati bolj nazorno (tudi zaradi uporabe pri drugih predmetih, na primer pri fiziki, kemiji…), uporabljamo približke decimalnih števil. Z zastavljenimi primeri v izzivu 4 odpiramo razmislek o zaokrožanju števil.

Izziv 4a: Zaokroži število 5,235 na dve decimalki.



Slika 5 Neobičajno pravilno zaokrožanje

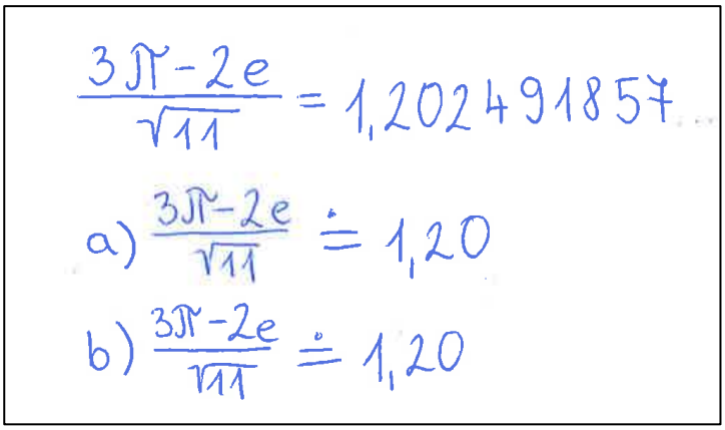
Komentar: Na dilemo pri zaokroževanju naletimo vsakič, ko moramo število zaokrožiti na določeno število decimalk, pri tem pa je na mestu, ki vpliva na zadnjo števko zaokroženega števila, števka 5. Takrat lahko dano število zapišemo s periodičnim ponavljanjem števke 9 na zadnjem mestu (glej primer na sliki 5). Ko zaokrožimo to število na enako število decimalk kot prej, dobimo drugo število. Ta primer je zelo poseben in ni potrebnih posebnih sprememb. Navajamo ga bolj kot zanimivost. Če pa že razmišljamo o tem, potem predlagamo običajno zaokrožanje.

Pobuda: Predlagamo dogovor, da se, ko je desno od mesta zaokrožanja števka 5, le te ne zapiše s periodičnim zapisom $4,\overline{9}$.

Izziv 4b: Število $\frac{3\pi-2e}{\sqrt{11}}$ zapiši v decimalni obliki tako, da ga zaokrožiš

a) **na tri decimalna mesta**

b) **na tri mesta.**



Slika 6 Primer »zaokrožanja« na decimalna mesta in na mesta

Komentar: Problem pri nakazanem primeru predstavljajo opisi definicij zapisov na določeno število mest, decimalk in decimalnih mest.

Pojem decimalke ni definiran v nobenem izmed obravnavanih učbenikov, vendar iz prakse vemo, da so to mesta v desetiškem zapisu števila, ki so desno od decimalne vejice (desetine, stotine, tisočine …). Tako kažejo tudi primeri iz osnovne šole, na primer v učbeniku Matematika 6 (Vir: Matematika 6, http://eucbeniki.sio.si/matematika6/507/index5.html, str. 256), kjer izenači zaokrožanje na stotine z zaokrožanjem na dve decimalki, kar se nam zdi korektno.

V učbeniku MATEMATIKA 1 zaokrožanje ni obravnavano. V učbeniku LINEA nova je govora o zaokrožanju na *n* decimalk in o zaokrožanju na *n* mest. Zaokrožanje na *n* mest je opisano s primerom »Število je zapisano na 3 mesta, če ima v svojem zapisu 3 števke, pri tem ničel spredaj in zadaj ne štejemo.« Konkretni primer, ko število 2679 zaokroži na tri mesta kot 2700, pa prinese zmedo. Iz zapisa 2700 ne moremo sklepati, na koliko mest je zapisano število 2700.

V učbeniku VEGA 1 je zaokrožanje zapisano korektno in preprosto: »Pri zaokroževanju na decimalke upoštevamo števke, ki so neposredno za decimalno vejico. Pri zaokrožanju na število mest upoštevamo števke ne glede na decimalno vejico, štete od prve neničelne naprej.« (VEGA 1, str. 386).

Po našem mnenju je tako definirano zaokrožanje na *n* decimalk dobro definirano (razen v primerih, ki so opisani v izzivu 4a), definicija zaokrožanja na *n* mest pa prinaša zmedo (enkrat ne šejemo ničel niti spredaj niti zadaj, drugič pa samo spredaj). Domnevamo, da je bilo zaokrožanje na *n* mest vpeljano zaradi lažjega prehajanja med enotami. Tako je na primer rezultat meritve 152,345 cm zapisan na štiri mesta: 152,3 cm = 1523 mm = 1,523 m = 1,523 10^{-3} km = 1,523 10^{6} μm. Če

zadnji zapis pretvorimo v celo število, dobimo 1523000 μm in spet ne vemo, na koliko mest je zapisano. Ničle zadaj so pomembne v zvezi z natančnostjo meritve oziroma merske napake, na primer: 3.1 je manj natančno kot 3.10. V prvem primeru je bilo lahko izmerjeno 3.05, 3.06, 3.07, 3.08, 3.09, 3.10, 3.11,3.12, 3.13 in 3.14, v drugem primeru pa 3.05, 3.06, 3.07, 3.08, 3.09, 3.10, 3.11, 3.12,3.13 in 3.14.

Kaj pa zaokrožanje na »decimalna mesta«, kot je navedeno v izzivu 4b? V obravnavanih učbenikih nismo zasledili tega pojma. V prvi izpitni poli spomladanskega izpitnega roka splošne mature 2017 pa je 6. naloga zahtevala: »Velikost kota zaokrožite na dve decimalni mesti.« Očitno je šlo tu za nedoslednost, saj je v desetiškem zapisu decimalno katerokoli mesto. Tako oblikovano navodilo dopušča zelo veliko možnih pravilnih zapisov.

Reševalec izziva 4b (glej sliko 6) je očitno štel, da so decimalna mesta prva tri mesta od leve proti desni (ni enačil decimalnih mest z mesti za decimalno vejico). Ne moremo trditi, da je njegova rešitev povsem napačna. Pod točko b) je naloga rešena pravilno.

Pobuda: Predlagamo poenostavitev in poenotenje. V decimalnem zapisu števila definiramo decimalke kot števke za decimalno vejico. Vsak rezultat v matematiki zapišemo kot točen (nezaokrožen). Na določeno število decimalk zaokrožimo točen rezultat, kadar to zahteva naloga ali kadar je to smiselno. Vedno pa lahko uporabimo tudi navodilo, da rezultat zapišemo zaokrožen na določenem mestu, na primer: »Rezultat zaokroži na desetice« ali »Rezultat zaokroži na stotine«. Ko gre za rezultat merjenja, moramo ob navodilu zapisati tudi enoto, na primer: »Velikost kota zaokrožite na stotinko stopinje«.

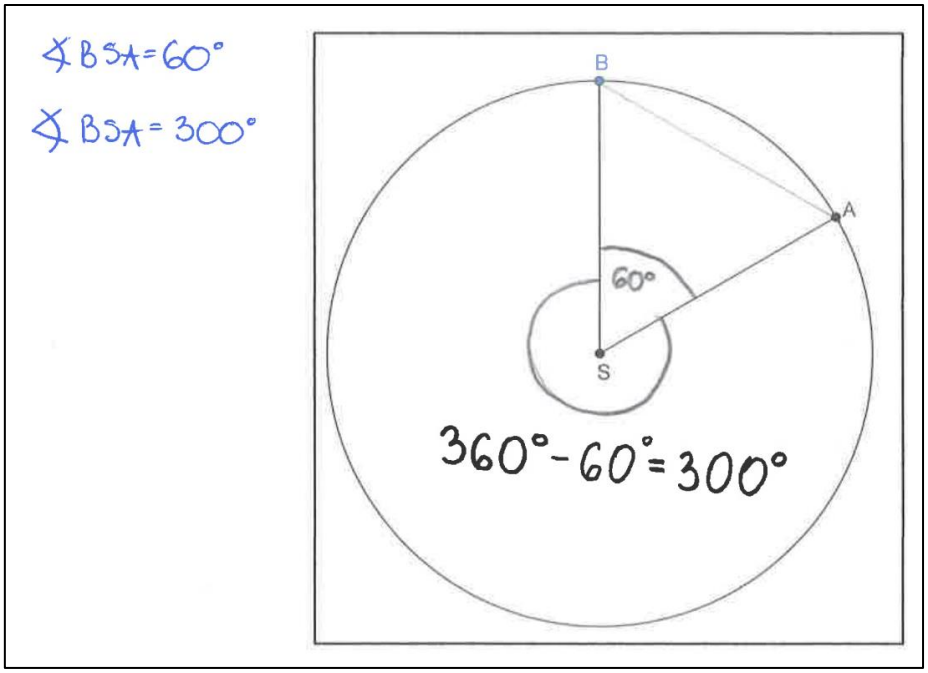
Navodila »Zaokroži na *n* decimalnih mest« ne uporabljamo, saj je vsako mesto v desetiškem zapisu decimalno in ne vemo, kaj s takim navodilom početi, saj ni enoznačno.

Predlagamo, da je »zaokrožanje na *n* mest« definirano tako, da štejemo mesta od prve neničelne števke naprej, ničle desno pa seveda upoštevamo. Predlagamo tudi, da se zaokrožanje na mesta uporablja skupaj s tako imenovanim »znanstvenim zapisom števil«, to je v obliki $a,\bar{b}\cdot 10^k, k\in Z$, kjer je $a\in N, 0\leq a<10$ in je $\bar{b}$ zapis decimalk. Za manjša števila med stotinko in številom tisoč pa zaokrožanja na mesta niti ne uporabljamo, razen izjemoma.

2.5. Kaj je kot?

V ravninski geometriji je kot eden izmed temeljnih geometrijskih objektov. Pri kotu gre za štiri nivoje: za definicijo kota v ravnini, za merjenje velikosti kotov, za razširitev pojma kota na poljubni kot in za kotne funkcije. V razdelku smo se omejili samo na prvo temo, se pravi, na definicijo kota v ravninski geometriji, saj različni viri različno vpeljejo pojem kota. V izzivu 5 je ponujen razmislek o tem. V nalogi je velikost kota uporabljena samo za prikaz problema.

Izziv 5: V krogu s središčem S in polmerom 5 cm meri tetiva AB 5 cm. Izračunaj velikost kota $< BSA$.



Slika 7 Možna rešitev naloge iz izziva 5

Komentar: Poglejmo, kako je definiran kot v obravnavanih učbenikih.

V učbeniku PLANUM novum je definicija taka: »Dva poltraka s skupnim izhodiščem določata dva kota. Če poltraka ne ležita na isti premici, je eden od kotov konveksen, drugi pa nekonveksen.« Za definicijo menimo, da je korektna, vendar je na sliki ob definiciji narisan le en (polni) kot, razdeljen na notranjost in zunanjost kota (Pavlič, 2012, str. 12).

V učbeniku MATAMATIKA 2 (Bon Klanjšček, 2010, str. 12) je kot opisan takole: »Poltraka s skupnim izhodiščem omejujeta del ravnine. Množica točk, ki ležijo na tem delu ravnine ali na poltrakih, je kot.« Iz slike, ki ilustrira definicijo, ni jasno razvidno, ali gre za en ali dva kota, saj so prikazane notranje in zunanje točke kote, in sicer so notranje točke narisane na nekonveksnem delu, zunanje pa na konveksnem delu.

Najbolj korektna je definicija kota v učbeniku Vega 2 (Ivanec, 2014, str. 13), kjer piše: »Dva poltraka s skupnim izhodiščem razdelita ravnino na dva kota.« Opisana je tudi orientacija kota in dobro označena. Iz definicije je razvidno, da dva poltraka (skupaj z orientacijo) določata štiri kote.

Komentar: Matematično dosledna se nam zdi definicija v učbeniku VEGA 2, saj (če upoštevamo orientacijo) imamo dejansko štiri kote. Problem je, kako smiselno označiti kot, da bo vsebovana tudi orientacija. Glede na to, da v gimnazijski geometriji ne uporabljamo orientacije kota, lahko orientacijo v definiciji izpustimo.

Reševalec izziva 5 je za vsak primer izračunal velikosti obeh kotov. Če bi hoteli točno določeni kot, bi morali to opisati s »konveksni« ali »nekonveksni« kot $< BSA$. Glede merjenja kotov v povezavi s kotnimi funkcijami pa ne vidimo problemov.

Pobuda: Predlagamo poenotenje vpeljave pojma kota in definicijo:

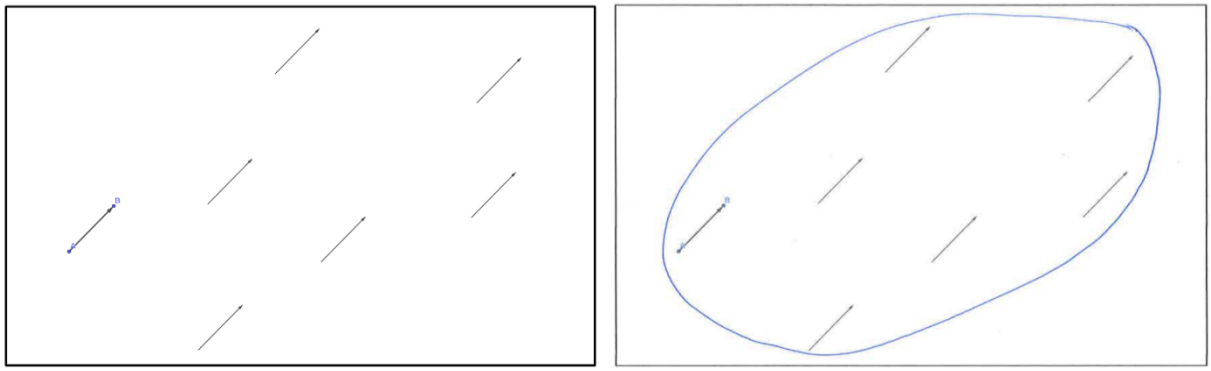
DEFINICIJA kota v ravnini: Kot je množica točk v ravnini, ki jo določata dva poltraka s skupnim izhodiščem (vrhom). Tako dobimo dva kota: konveksnega in nekonveksnega. V primeru, ko se poltraka dopolnjujeta v premico, dobimo dva iztegnjena kota, v primeru sovpadanja poltrakov pa dobimo polni in ničelni kot.

Oznake kotov: Kote označimo s simbolom za kot in točkami na poltrakih ter vrhom, kjer je vrh v sredini ali z grškimi črkami. Če lahko dvomimo o tem, za kateri kot gre, uporabimo pridevnik »konveksen« (»nekonveksen«) ali pa na sliki ustrezno označimo. Prav tako dopuščamo oznako, na primer $< ASB$, $< A$ ali oznako kota z grškimi črkami tako za kot in tudi za njegovo velikost (smiselno uporabljamo, če pa je potrebno, zapišemo na primer: velikost kota $< ASB$.)

2.6. Kaj je vektor?

Opazili smo, da med maturitetnimi vprašanji za splošno maturo ni vprašanja »Kaj je vektor?« Pri obravnavi tega poglavja je govora o tem in o povezavi usmerjene daljice z vektorjem. Najpogosteje je rečeno, da je vektor usmerjena daljica. V tem razdelku raziskujemo pojem vektorja, kot je definiran v učbenikih za matematiko. Za usmeritev v problem smo sestavili izziv 6.

Izziv 6: Na sliki 8a so vse usmerjene daljice enako dolge, med sabo vzporedne in vse usmerjene v isto smer. Označi vektor $\overrightarrow{AB}$.



Sliki 8a in 8b Predloga in ena izmed rešitev naloge iz izziva 6

Komentar: Pri vektorju raziskujemo definicijo. Vektor je pravzaprav družina vseh usmerjenih daljic v ravnini, ki so enako dolge, enako usmerjene in med seboj vzporedne. Vseeno je, katerega predstavnika izberemo. Kako to dobro opisati v jasni definiciji? Kako lepo ločiti med (enim) vektorjem in družino enakih vektorjev, kateri ta posamezni vektor pripada. Podoben problem je pri ulomkih in racionalnih številih. Tam vse ulomke razdelimo v razrede. V isti razred spadajo vsi ulomki, ki so med seboj v relaciji »biti enak«: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (ta relacija »biti enak« je ekvivalenčna relacija). Tako dobljene razrede imenujemo racionalna števila. Za računanje vzamemo en ulomek, predstavnika racionalnega števila.

V obravnavanih učbenikih so vektorji definirani takole:

Učbenik MATEMATIKA 2: »Vektor je količina, določena s smerjo, z usmerjenostjo, z dolžino (Bon Klanjšček, 2010, str. 44).« »Vektorja sta enaka, če se ujemata v smeri (sta vzporedna), usmerjenosti, dolžini (Bon Klanjšček, 2010, str. 45).«

Učbenik SPATIUM novum: »Vektor je množica usmerjenih daljic, ki imajo isto velikost in ležijo na vzporednih nosilkah. Zaradi enostavnosti vedno vzamemo le predstavnika te množice in delamo z njim (Pavlič, 2012, str. 96).« »Dva vektorja sta torej enaka, če imata isto velikost, ležita na vzporednih premicah in sta enako usmerjena (Pavlič, 2012, str. 96).«

Učbenik VEGA 2: »Količine, ki imajo poleg velikosti tudi smer, so vektorske količine oziroma vektorji. Vsak urejen par točk v prostoru določa vektor (Ivanec, 2014, str. 214).« »Usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ določata isti vektor natanko takrat, ko sta vzporedni, enako dolgi in kažeta v isto smer. V tem primeru rečemo tudi, da sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ enaka ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) in da lahko vektor $\overrightarrow{AB}$ vzporedno premaknemo tako, da ima začetek v točki C. Vsak vektor ima neskončno svojih predstavnikov in se ne spremeni, če ga vzporedno premaknemo (Ivanec, 2014, str. 215).«

Z nobeno izmed predlaganih definicij nismo najbolj zadovoljni, saj površno vpelje posamezni vektor in družino vektorjev, iz katere je ta predstavnik. Druga definicija ima v prvem stavku napako, saj ne govori o usmerjenosti. V zadnjem stavku je ta napaka odpravljena. Še najbolj se našim pričakovanjem približa tretja definicija.

Pobuda: Predlagamo, da definiramo vektor preko pojma usmerjene daljice takole:

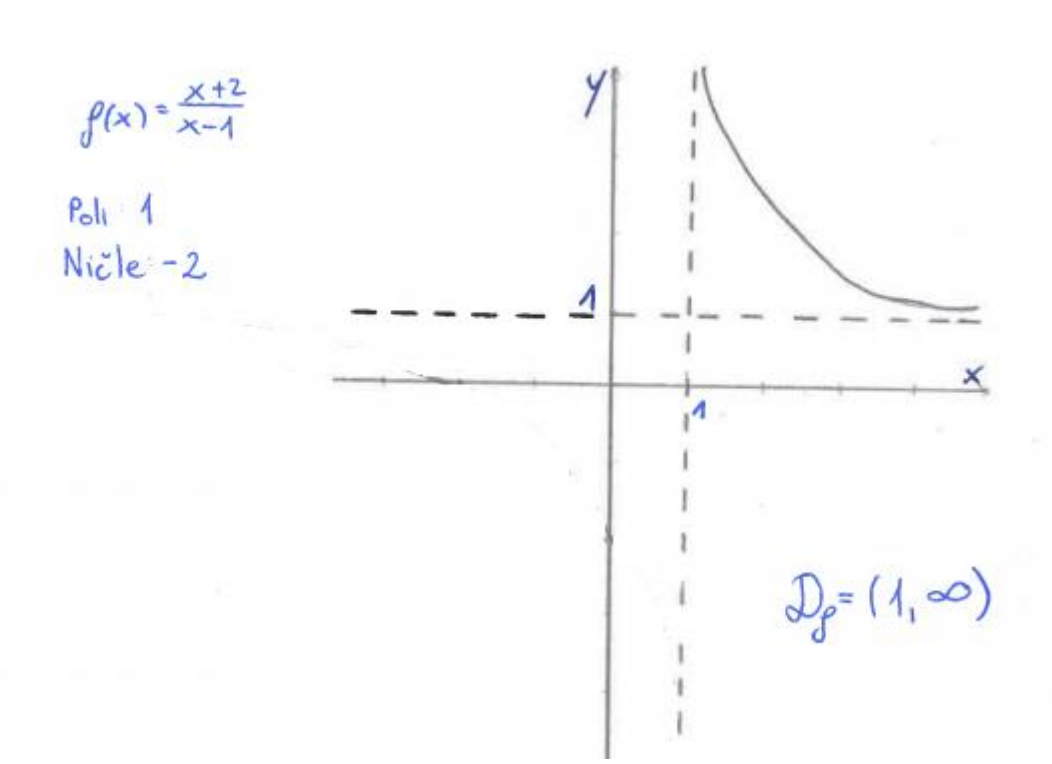
DEFINICIJA vektorja: Usmerjena daljica $\overrightarrow{AB}$ je vsak urejen par točk A in B v prostoru in jo označimo z $\overrightarrow{AB}$. Daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ sta ekvivalentni (sta »enaki«) natanko takrat, ko lahko povežemo začetka usmerjenih daljic $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ ter njuna konca, tako da dobimo paralelogram. Vektor $\overrightarrow{AB}$ je množica vseh usmerjenih daljic v prostoru, ki so ekvivalentne (so »enake«) usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$. Za predstavnika vektorja $\overrightarrow{AB}$ lahko vzamemo katerokoli usmerjeno daljico iz množice vektor $\overrightarrow{AB}$.

Rešitev na sliki 8b je delno pravilna (čeprav ni bilo možno obkrožiti »neskončno« vektorjev). Reševalec pa očitno loči med pojmoma usmerjena daljica in vektor.

2.7. Ali je definicijsko območje funkcije enolično določeno?

Funkcija $f: A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko določeni element v množici B. Množico A imenujemo tudi definicijsko območje funkcije f. V primeru realnih funkcij realne spremenljivke pa definicijsko območje ni vnaprej določeno. Za uvod smo sestavili tipično nalogo s tega področja.

Izziv 7: Dana je realna funkcija realne spremenljivke f s predpisom $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Določi definicijsko območje funkcije f.



Slika 9 Primer pravilne rešitve naloge iz izziva 7

Komentar: Poglejmo definicijo definicijskega območja. V učbeniku MATEMATIKA 2 (Bon Klanjšček, 2010, str. 104) je zapisano: »Funkcija iz množice A v množico B je predpis, ki vsakemu elementu x množice A priredi natanko določen element y množice B. Elementi množice A so originali in sestavljajo definicijsko območje D_f, torej je $D_f = A$.« Vsebinsko enaka definicija je v ostalih dveh učbenikih. Realna funkcija realne spremenljivke pomeni, da je množica A podmnožica množice realnih števil, množica B pa so realna števila (Ivanec, 2014, str. 389). Nikjer ne piše, da je

D_f največja podmnožica realnih števil, za katero je podan funkcijski predpis definiran (smiseln). Pravilna rešitev dane naloge je torej katerakoli podmnožica največjega smiselnega definicijskega območja. Ugotavljamo, da je bila naloga iz izziva 7 rešena pravilno (glej sliko 9).

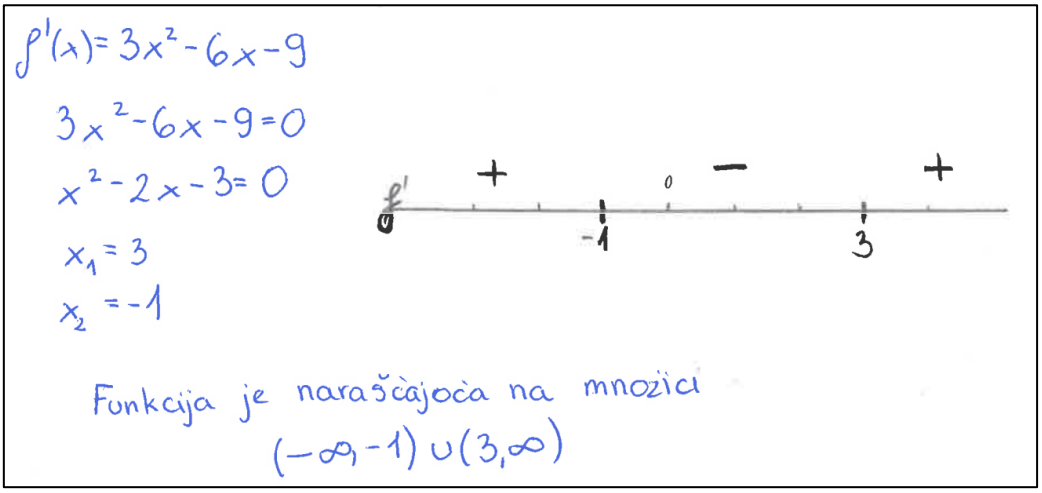
Prva pobuda: V tuji literaturi (glej na primer The Math Forum of NCTM) ločijo definicijsko območje (*domain*) od naravnega definicijskega območja (*natural domain*). Naravno definicijsko območje je največja podmnožica realnih števil, za katero je dani funkcijski predpis realne funkcije realne spremenljivke definiran, definicijsko območje pa je katerakoli podmnožica naravnega definicijskega območja. Ko želimo poiskati največje definicijsko območje, bi bilo v skladu s to novo opredelitvijo vprašanje v izzivu: *Določi naravno definicijsko* območje funkcije f. Brez te opredelitve pa bilo bolj smiselno vprašanje: *Določi največje definicijsko območje funkcije f.* Pridevnik *naravno* utemeljimo s tem, da je naravno definicijsko območje tisto (seveda največje), ki ga smiselno določa definicija funkcijskega predpisa. Kadar pa želimo kakšno drugo definicijsko območje, ga posebej določimo (torej umetno, nenaravno).

Druga pobuda: Zagato mogoče lahko rešimo še bolj enostavno tako, da poleg definicije funkcije zapišemo še dopolnilo: »Kadar v opisu funkcije ni podano definicijsko območje, vzamemo za definicijsko območje največjo množico, za katero je podani predpis smiseln.« V praksi se to zgodi na primer pri realnih funkcijah, ko je funkcija podana samo s predpisom. Za tako funkcijo je torej definicijsko območje največja podmnožica realnih števil, za katera lahko s podanim predpisom izračunamo funkcijsko vrednost *f(x)*.

2.8. Kdaj je funkcija naraščajoča na intervalu, kdaj v točki?

Pojem naraščajoče in padajoče funkcije je eden osrednjih pojmov. Ko analiziramo lastnosti funkcije, vedno določimo množico, na kateri je funkcija naraščajoča in množico, na kateri je padajoča. Ker naraščanje in padanje v šoli obravnavamo na različne načine, prilagojene uporabi, pogosto ne vemo, ali naj odgovore zapišemo z zaprtimi ali odprtimi intervali in ali naj v primeru več intervalov zapišemo unijo intervalov. Tipična naloga je zapisna v izzivu 8.

Izziv 8: Poišči intervale naraščanja funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$.



Slika 10 Primer dijakove rešitve naloge iz izziva 8

Oglejmo si, kako je naraščanje/padanje opredeljeno v obravnavanih učbenikih. V drugem letniku definiramo monotono funkcijo (naraščajočo ali padajočo funkcijo) na intervalu.
Definicija naraščajoče funkcije: Realna funkcija realne spremenljivke f s predpisom $f(x)$ je naraščajoča na intervalu $I = [a, b]$, če za poljubna $x_1, x_2 \in I$ velja: če je $x_1 < x_2$, potem je $f(x_1) \leq f(x_2)$. Definicija za padajočo funkcijo je analogna.

V četrtem letniku pa kot primer uporabe odvoda definiramo naraščanje in padanje funkcije v točki:

Funkcija f narašča v točki z absciso $x = x_0$, če je $f'(x_0) > 0$ oziroma narašča na intervalu (a,b), če je $f'(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a, b)$. Opis za padajočo funkcijo je analogen.

Izzivov je več. Prvi je, ali je zapis z unijo intervalov pravilen, drugi, kako zapisati odgovore: z odprtimi ali zaprtimi intervali in tretji, kako definirati naraščajočo/padajočo funkcijo v točki (brez odvoda).

Zgled v učbeniku TEMPUS novum (Pavlič, 2014, str. 223) je rešen napačno. Odgovor je zapisan z unijo intervalov. Če vzamemo primeren x_1 iz levega intervala in primeren x_2 iz drugega intervala, potem ni nujno, da je $f(x_1) \leq f(x_2)$ (druga funkcijska vrednost je lahko manjša).

Obstaja neskladje med definicijo naraščajoče/padajoče funkcije na intervalu in zapisom rešitev. V učbeniku PLANUM novum je naraščanje/padanje definirano na zaprtem intervalu (Pavlič, 2012, str. 161), rešitve nalog v učbeniku TEMPUS novum pa so zapisane z odprtimi intervali (Pavlič, 2014, str. 226 in 336). V učbeniku MATEMATIKA 2 je naraščanje/padanje definirano na odprtem intervalu, rešitve nalog so zapisane na odprtih intervalih (Bon Klanjšček, 2010). V učbeniku VEGA 2 je v definiciji omenjen interval (ni razvidno, ali gre za odprti ali zaprti interval), rešitve so zapisane z odprtimi intervali (Ivanec, 2014, str. 398). Iz učbenikov ni razvidno, ali gre v četrtem letniku za novo definicijo naraščanja/padanja ali pa gre za trditev (izrek).

Rešitev izziva 8 (slika 10) je zapisana z unijo intervalov, torej napačno. Uporabil je okrogle oklepaje. Če bi pri končnih robnih točkah uporabil zaprti interval, bi bilo v redu.

Dodatek: V učbenikih je definirano naraščanje/padanje na intervalu, potem v četrtem letniku z odvodi naraščanje in padanje v točki ter to razširjeno na interval, manjka pa definicija naraščanje/padanje funkcije v točki brez diferencialnega računa.

Predlog: Funkcija $f: D_f \subseteq R \to R$ narašča v točki $x_0 \in D_f$, če obstaja $\varepsilon > 0$, tako da za vsak $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$: $x < x_0 \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ in $x > x_0 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Prva pobuda: Popraviti je potrebno napake v zapisu rešitev (kjer so zapisane z unijami intervalov) in uskladiti, ali pišemo z odprtimi ali zaprtimi intervali.

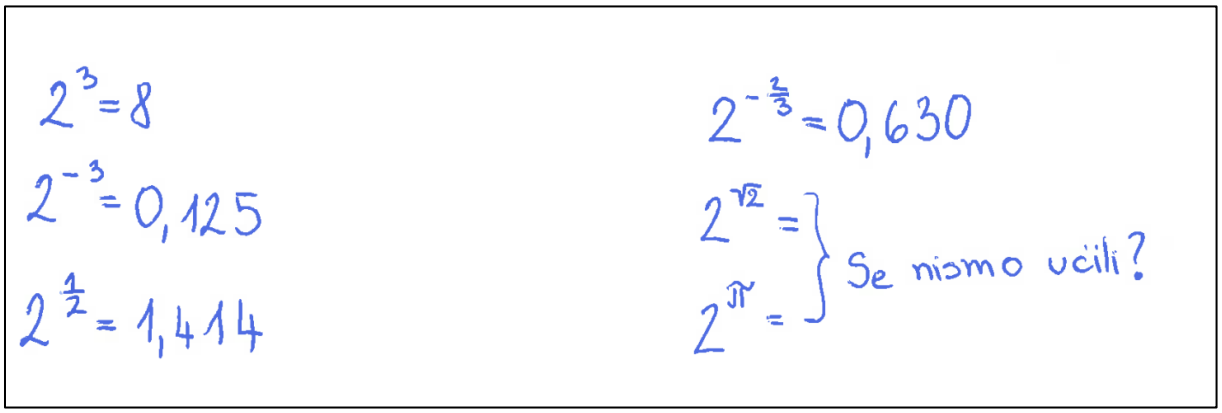
Druga pobuda: Menimo pa, da bi dileme okrog zaprtih in odprtih intervalov odpravili tako, da bi definirali naraščanje/padanje na množici. Potem bi v posameznem primeru lahko uporabili odprti ali zaprti interval, kar je pač v skladu zahtevo naloge.
DEFINICIJA naraščajoče funkcije: Funkcija $\boldsymbol{f: A \subseteq R \to R}$ je naraščajoča, če za vsaka $\boldsymbol{x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2}$ velja, da je $\boldsymbol{f(x_1) \leq f(x_2)}$.

DEFINICIJA padajoče funkcije: Funkcija $\boldsymbol{f: A \subseteq R \to R}$ je padajoča, če za vsaka $\boldsymbol{x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2}$ velja, da je $\boldsymbol{f(x_1) \geq f(x_2)}$.

2.9. Kako je definirana eksponentna funkcija?

Prepričani smo, da se od takrat, ko lahko s pomočjo elektronskih računal izračunamo vrednosti potenc $a^x; a, x \in R,\ a > 0, a \neq 1$, ne sprašujemo, kako bi izračunali na primer $3^{\sqrt{5}}$ ali 3^{π}. V tem razdelku raziskujemo definicijo eksponente funkcije. Problem smo predstavili z nalogo, ki je opisna v izzivu 9.

Izziv 9: Izračunaj naslednje vrednosti: $2^3, 2^{-3}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{2}{3}}, 2^{\sqrt{2}}, 2^{\pi}$. Lahko si pomagaš z žepnim računalom, ki »zna« izračunati vrednosti potenc z racionalnim eksponentom. Opiši postopek.



Slika 11 Primer dijakove rešitve naloge iz izziva 9

Komentar: Problem je v definiciji eksponentne funkcije. V vseh treh obravnavanih učbenikih je definicija eksponentne funkcije vsebinsko enaka:

Definicija: Eksponentna funkcija je funkcija $R \to R$, ki jo zapišemo s predpisom $f(x) = a^x; a > 0, a \neq 1$.

S to definicijo pa nismo povedali, kako se izračuna funkcijska vrednost za vsako realno število x. Za $q \in Q$ vemo, kako se izračuna potenca $a^q, a > 0$. V omenjenih učbenikih pa ne piše, kako izračunamo potenco, kjer je eksponent iracionalno število. Poskusimo.

a) $2^{\sqrt{2}}$ Izračunali bi nekaj zaporednih približkov: $2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, 2^{1,4142} \ldots$ dokler ne bi dobili želene natančnosti. Vsako posamezno potenco pa znamo izračunati.
b) Podobno bi se lotili 2^{π}. Izračunali bi primerno število približkov $2^3, 2^{3,1}, 2^{3,142}, 2^{3,1416} \ldots$

V ozadju teh približkov pa je seveda limita.

Pobuda: Popolna definicija eksponentne funkcije bi tako bila:

DEFINICIJA eksponentne funkcije: Eksponentna funkcija je funkcija $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ki jo zapišemo s predpisom $\mathbf{f(x) = a^x; a > 0, a \neq 1}$. Število $\mathbf{a^x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ izračunamo kot limito zaporedja približkov

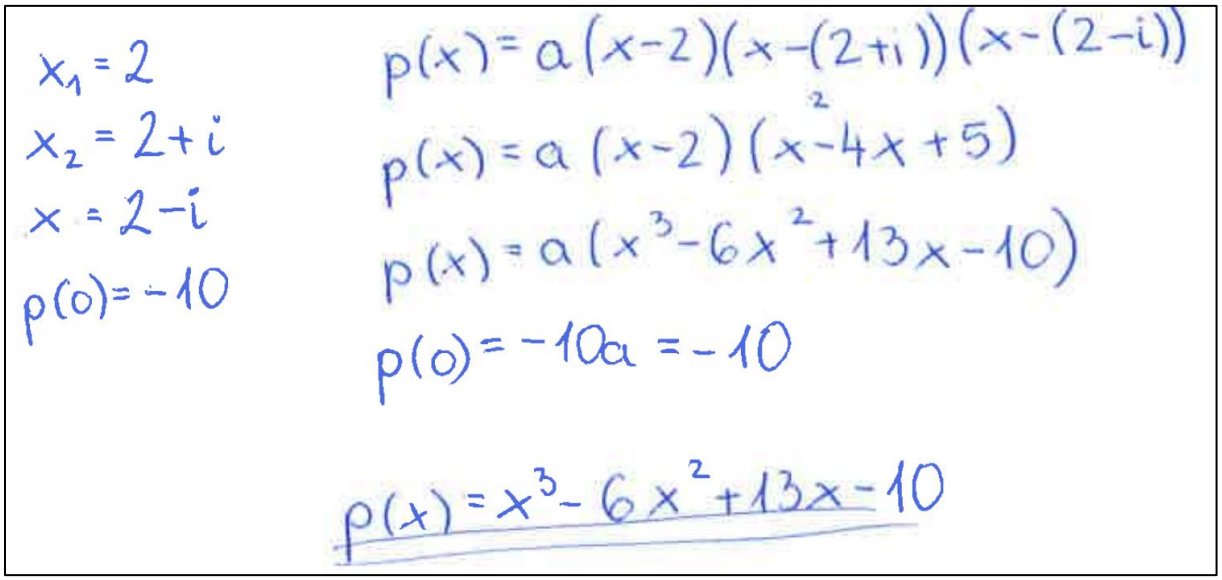
$$\mathbf{a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}},$$

kjer je $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \cdots}$ poljubno zaporedje racionalnih števil, ki ima limito $\boldsymbol{x}$: $\mathbf{x = \lim_{n\to\infty} x_n}$. (Vidav, 1961).

2.10. Ali kompleksne ničle polinoma res nastopajo v konjugiranih parih?

Polinomsko funkcijo v gimnaziji obravnavamo tako kot vse ostale funkcije, torej kot funkcijo $p: R \to R$, v učbenikih in zbirkah nalog pa je veliko nalog, v katerih nastopajo kompleksne ničle (primer je predstavljen v izzivu 10). Dokazana je tudi trditev, da prave kompleksne ničle polinoma z realnimi koeficienti nastopajo v konjugiranih parih.

Izziv 10: Poišči funkcijski predpis $\boldsymbol{p(x)}$ polinoma $\boldsymbol{p: R \to R}$ z realnimi koeficienti najnižje stopnje, ki ima realno ničlo $\boldsymbol{x_1 = 2}$ ter kompleksno ničlo $\boldsymbol{x_2 = 2 + i}$ in ima začetno vrednost -10.



Slika 12 Običajna rešitev naloge iz izziva 10

Komentar: Ker je polinom definiran kot polinom z realnimi koeficienti in kot realna funkcija realne spremenljivke, naloga ni rešljiva.

Če pa polinom z realnimi koeficienti definiramo kot funkcijo $C \to C$, potem je rešitev $p(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.

Definicija polinoma je v učbenikih SPATIUM novum in Matematika 3 podobna: »Polinomi so realne funkcije realne spremenljivke, definirane za vsa realna števila, z zalogo vrednosti, ki je podmnožica množice R in imajo obliko:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; a_n \neq 0.$«

Ker je polinom definiran kot funkcija $p: R \to R$, torej kot funkcija z realnimi koeficienti in realna funkcija realne spremenljivke, je izziv 10 nerešljiv. Rešitev na sliki 12 je torej napačna.

Prva pobuda: V obravnavanih učbenikih so naloge s polinomi in kompleksnimi ničlami zapisane tako kot v izzivu 10. Predlagamo, da se podobne naloge preoblikuje tako, da se obide omenjanje kompleksnih ničel in govorimo o rešitvah enačbe $p(x) = 0$. Tako bi se Izziv 10 glasil:

Izziv 10 (nov): Poišči funkcijski predpis $p(x)$ polinoma $p: R \to R$ z realnimi koeficienti najnižje stopnje, ki ima realno ničlo $x_1 = 2$, začetno vrednost -10 in je število $2 + i$ rešitev enačbe $p(x) = 0$ v množici kompleksnih števil.

Druga pobuda: V učbeniku Vega 3 je definicija polinoma naslednja:

»Polinom spremenljivke x je izraz, ki ima obliko linearne kombinacije potenc z osnovo x in z nenegativnim celim eksponentom, pri kateri so koeficienti iz poljubne številske množice. Splošen zapis polinoma je $a_n x^n + \ldots + a_0$, kjer je $n \in N_0$ stopnja polinoma, $a_n, \ldots, a_0$ pa koeficienti polinoma (običajno realni, lahko tudi kompleksni).

Polinomska ali cela racionalna funkcija $p: R \to R$ je realna funkcija realne spremenljivke, podana s predpisom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; a_n \neq 0, a_i \in R$.

V polinomih oz. predpisih polinomskih funkcij lahko nastopajo tudi kompleksni koeficienti, ali pa računamo vrednosti izrazov (funkcij) za kompleksna števila. V takih primerih gledamo na polinomske funkcije kot kompleksne funkcije kompleksne spremenljivke.«

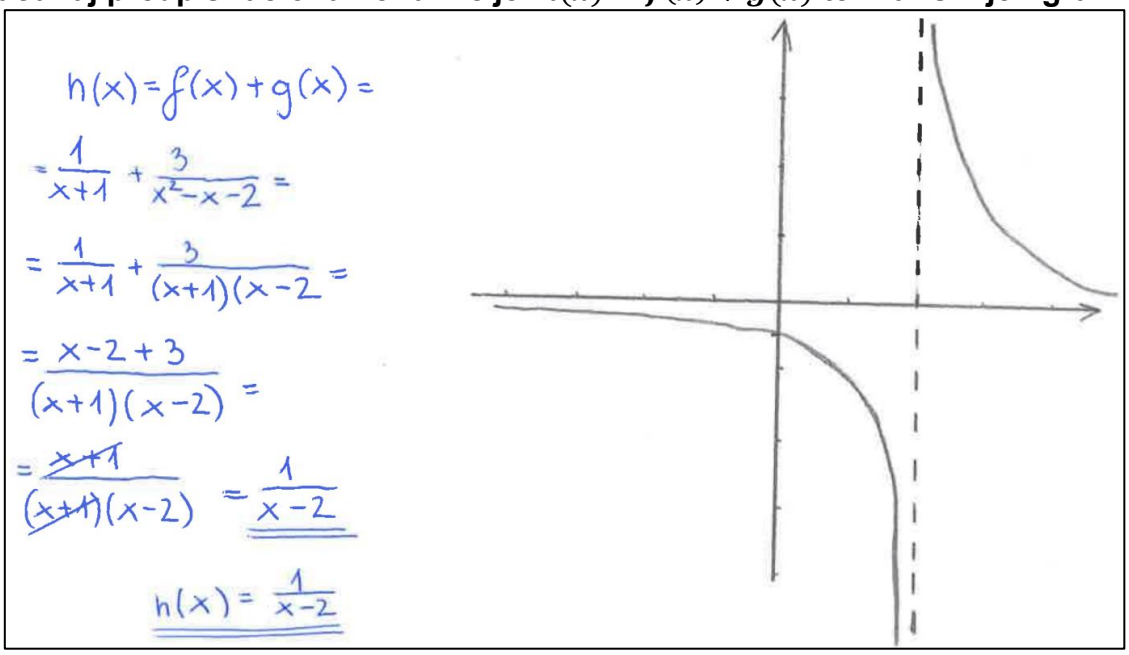
Po tej definiciji polinomske funkcije bi bila zgornja naloga preprosto rešljiva. Predlagamo, da se poenoti definicija polinomske funkcije v srednješolskih učbenikih:

DEFINICIJA polinoma: Polinomska funkcija $p: R \to R$ je realna funkcija realne spremenljivke, podana s predpisom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; a_n \neq 0, a_i \in R$. Polinomsko funkcijo lahko definiramo tudi kot funkcijo $p: C \to C$, kjer so koeficienti polinoma realna ali kompleksna števila. Pri obravnavi bomo to posebej zapisali.

2.11. Kako definiramo racionalno funkcijo?

Racionalna funkcija je kvocient dveh polinomov. Pri tem lahko kvocient okrajšamo (če imata števec in imenovalec kakšen skupni faktor) ali pa dopuščamo tudi neokrajšane kvociente. V tem razdelku razpravljamo o definiciji racionalne funkcije. Kot pobudo za razmislek smo zastavili nalogo v izzivu 11.

Izziv 11: Dani sta racionalni funkciji s predpisoma $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ter $g(x) = \frac{3}{x^2-x-2}$. Izračunaj predpis racionalne funkcije $h(x) = f(x) + g(x)$ ter nariši njen graf.



Slika 13 Primer rešitve naloge iz izziva 11

Komentar: V obravnavanih učbenikih je racionalna funkcija različno definirana. V učbenikih SPATIUM novum in Matamatika 3 je definirana kot kvocient okrajšanih polinomov z neničelnim imenovalcem, v učbeniku VEGA 3 kot kvocient polinomov z neničelnim imenovalcem. Če vzamemo prvo definicijo, ne moremo v splošnem računati (seštevati, odštevati, množiti) z racionalnimi funkcijami, saj pri tem dobimo neokrajšane kvociente. Pri rešitvi izziva 11 na sliki 13 imamo več pomislekov. Če vzamemo, da je bila racionalna funkcija definirana kot kvocient okrajšanih kvocientov, je izračun napačen, saj pri iskanju skupnega imenovalca funkcijski predpis razširimo. Če vzamemo, da je bila racionalna funkcija definirana kot kvocient dveh polinomov, je izračun korekten, graf pa ne. Funkcija h ni definirana tudi pri $x = -1$ in to bi treba na grafu označiti.

Prva pobuda: Ker se v gimnaziji z racionalnimi funkcijami tudi računa, predlagamo, da se jih definira kot kvocient dveh polinomov z neničelnim imenovalcem. V tem primeru moramo seveda pojasniti, kako narišemo graf tistih racionalnih funkcij, kjer si števec in imenovalec nista tuja, na primer: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$.

Druga pobuda: Če bi vpeljali pojem ulomka le kot zapis (kar smo predlagali v razdelku 2.2 v drugi pobudi), potem definiramo racionalne funkcije kot *polje* nad množico polinomov. Potem so racionalne funkcije kvocienti poljubnih polinomov z neničelnim imenovalcem.

2.12. Navada ali natančnost pri navodilih (primer aritmetičnega zaporedja)

Pri reševanju srednješolskih nalog smo ugotovili, da so nekatere naloge površno sestavljene. Dijaki jih rešujemo po naučenem vzorcu in se običajno niti ne sprašujemo o besedilu naloge. Kot primer nedoslednosti navajamo nalogo, ki je enakega tipa kot številne podobne naloge iz aritmetičnega in geometrijskega zaporedja (glej izziv 12).

Izziv 12: Določi tako realno število x, da bodo $3x-5,\ x+5,\ x+1$ členi aritmetičnega zaporedja.

$3x-5,\ x+5,\ x+1$

$\frac{3x-5+x+1}{2} = x+5$

$\frac{4x+4}{2} = x+5$

$2x-x = 5+2$

$\underline{\underline{x=7}}$

$3x-5=16$
$x+5=12$
$x+1=8$

Pri $x=7$ sta zaporedji 8, 12, 16 ter 16, 12, 8.

$\frac{3x-5+x+5}{2} = x+1$

$\frac{4x}{2} = x+1$

$\underline{\underline{x=1}}$

$3x-5=-2$
$x+5=6$
$x+1=2$

Pri $x=1$ sta zaporedji $-2, 2, 6$ ter $6, 2, -2$.

$\frac{x+5+x+1}{2} = 3x-5$

$\frac{2x+6}{2} = 3x-5$

$x-3x = -5-3$

$2x = 8$

$\underline{\underline{x=4}}$

$3x-5=7$
$x+5=9$
$x+1=5$

Pri $x=4$ sta zaporedji 5, 7, 9 ter 9, 7, 5.

Slika 14 Vse rešitve problema iz izziva 12

Komentar: V obravnavanih učbenikih je precej podobnih nalog. Iz navodila ni razvidno, ali morajo biti našteti členi v danem vrstnem redu ali ne. Besedilo je dvoumno. Običajno rešujemo naloge po inerciji, kar ni prav. Naloga v izzivu 12 je rešena pravilno (glej sliko 14). Rešitve podobnih nalog v učenikih pa vsebujejo samo rešitev, in sicer le tisto, za katero so členi v enakem vrstnem redu kot v nalogi.

Pobuda: Predlagamo, da se podobne naloge v učbenikih dopolni z dodatkom »v tem vrstnem redu«, kadar to predvidimo. Prav je, da dijake navajamo na natančnost tudi v izražanju. Izziv 13 bi se tako glasil: »**Določi tako realno število x, da bodo $3x-5$, $x+5$, $x+1$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja v tem vrstnem redu.**

2.13. Definicija geometrijskega zaporedja

Pogosto definiramo geometrijsko zaporedje kot zaporedje, pri katerem je količnik sosednjih členov konstanten: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, q \in R$. Ali s to definicijo opišemo vsa geometrijska zaporedja? Kot primer si oglejmo nalogo v izzivu 13.

Izziv 13: Ali je zaporedje 2018, 0, 0, 0 geometrijsko?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{konstanta} \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{0}{2018} = 0 \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{0}{0} = ?$$

Slika 15 Dijakovo reševanje naloge iz izziva 13

Komentar: V učbeniku TEMPUS novum je geometrijsko zaporedje definirano takole: »Zaporedje je geometrijsko, če je količnik med poljubnim (n>1) in pred stoječim členom konstanten: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. (Pavlič, 2014, str. 24). V učbeniku MATEMATIKA 4 je definicija geometrijskega zaporedja vsebinsko enaka (količnik med sosednjima členoma je stalen).

Ta definicija ne ustreza vsem primerom geometrijskega zaporedja. V izzivu 13 je dano geometrijsko zaporedje, ki pa po opisanih definicijah ni geometrijsko. Reševalec izziva 13 je naletel na težave, ker je nalogo skušal rešiti po zapisani definiciji, samo zaporedje pa je dejansko geometrijsko (glej sliko 15).

Pobuda: Predlagamo, da se definicija geometrijskega zaporedja glasi takole:

DEFINICIJA geometrijskega zaporedja: Zaporedje je geometrijsko, kadar obstaja takšno realno število $k \in R$, da za vsako naravno število n $(n \geq 1)$ velja:

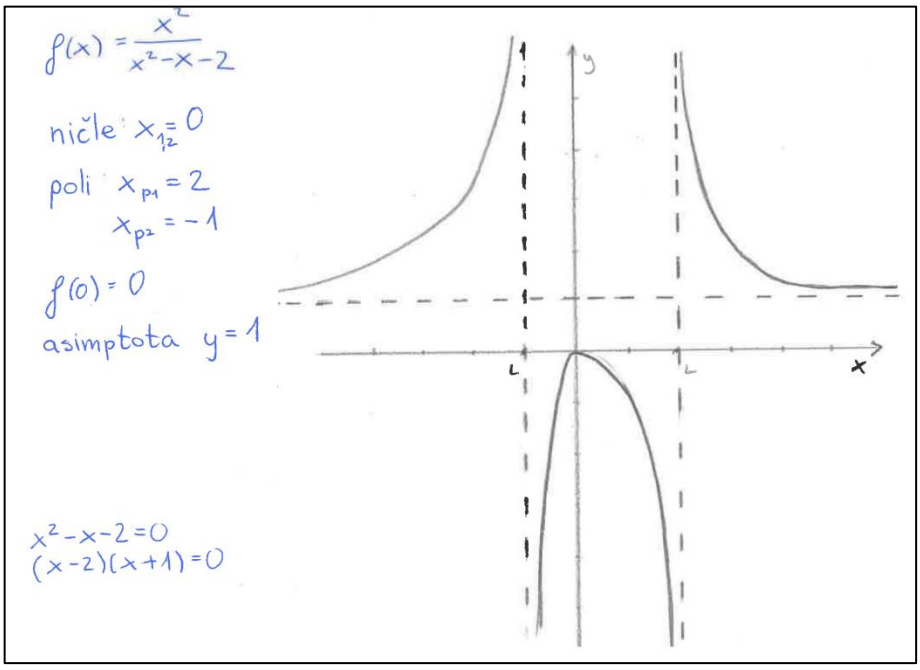
$$a_{n+1} = k \cdot a_n.$$

Za neničelna geometrijska zaporedja pa velja, da je količnik med poljubnim $(n \geq 1)$ in pred stoječim členom konstanten: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, kar sledi iz zgornje definicije.

2.14. Ali se graf racionalne funkcije približuje polu?

Ko rišemo funkcije, ki imajo pole, pogosto rečemo, da »narišemo pol«, da se graf funkcije »približuje polu« in podobno. V tem razdelku razpravljamo o definiciji pola in o navpičnih asimptotah. Sestavili smo nalogo (glej izziv 14), ki je zapisana v »matematičnem žargonu« in prikazuje napovedan problem.

Izziv 14: Dana je realna funkcija realne spremenljivke s predpisom $f(x) = \frac{x^2}{x^2-x-2}$. Določi ničle, pole, začetno vrednost in vodoravno asimptoto, nariši pole, vodoravno asimptoto in graf funkcije f.



Slika 16 Pravilna rešitev naloge iz izziva 14

Komentar: Ko dijaki odgovarjamo na vprašanje o grafu racionalne funkcije, večkrat rečemo, da se graf funkcije približuje polu. (Nato razložimo razliko med polom sode in polom lihe stopnje.) Profesorji nas potem popravljajo. Ali imamo prav?

Naj bo racionalna funkcija $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer $q(x)$ ni ničelni polinom in je kvocient $\frac{p(x)}{q(x)}$ okrajšan. V vseh treh obravnavanih učbenikih so poli racionalne funkcije ničle polinoma, ki je v imenovalcu. V polih ima funkcija navpično asimptoto. Torej: pol je točka na abscisni osi, ki je rešitev enačbe $q(x) = 0$, v polu pa ima graf racionalne funkcije navpično asimptoto. Zato v tem primeru dijaki nimamo prav.

Pobuda: V obravnavanih učbenikih nismo zasledili neskladnosti. Opozarjamo le na potrebo po natančnem izražanju. Graf funkcije se ne približuje polu, temveč navpični asimptoti, ki poteka skozi pol. Ko se vrednost neodvisne spremenljivke približuje polu, se graf funkcije v neskončnosti približuje navpični asimptoti.

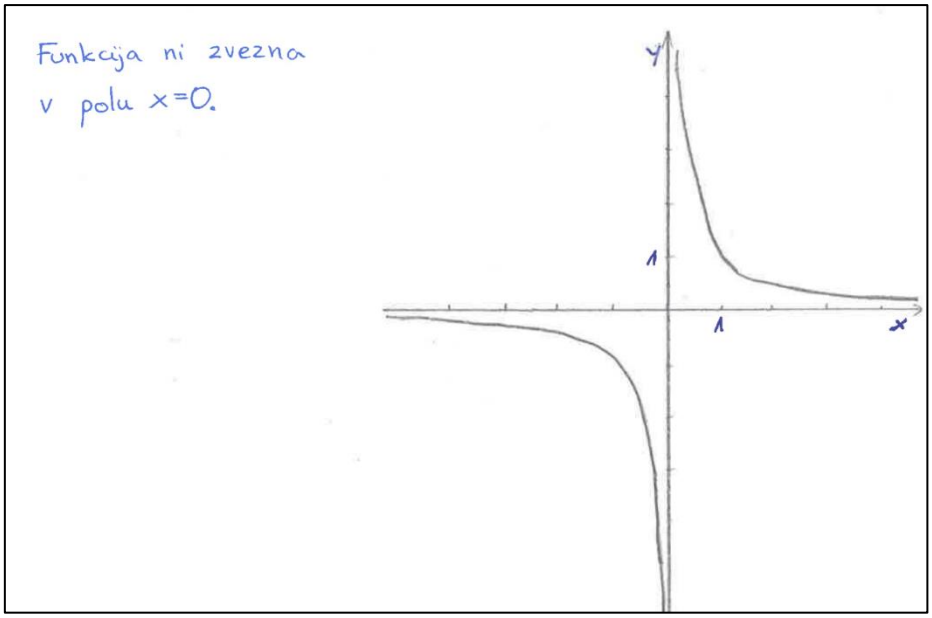
Opomba: V angleški literaturi nismo zasledili pojma, ki bi bil enakovreden slovenskemu *polu*. Tam poiščejo točke, v katerih dana funkcija ni definirana in v teh točkah narišejo navpično asimptoto. Zasledili smo tudi primere (na primer v http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/Alg/GraphRationalFcns.aspx), ko v postopku priprave podatkov za risanje poiščejo ničle, začetno vrednost in asimptote.

Dodajamo še mnenje o oznakah. Z oznako $x = 2$ označimo hkrati pol in zapišemo enačbo navpične asimptote. Zato predlagamo, da bi se pole zapisalo na primer takole: poli funkcije f so -1 in 2, navpični asimptoti sta x = -1 ter x = 2. Podobno za ničle, na primer: Funkcija ima ničlo 0 druge stopnje.

2.15. Ali so poli racionalne funkcije točke nezveznosti?

Domnevamo, da je pojem zvezne funkcije v matematični teoriji zelo pomemben pojem, s katerim pa se v gimnazijskem programu ukvarjamo le z osnovami. Na težavo smo doleteli, ko smo v učbenikih opazili neskladje med definicijo zveznosti in rešitvami nalog. Za ilustracijo problema smo sestavili nalogo v izzivu 15a, naloge iz izziva 15b pa so vzete iz učbenika TEMPUS novum, (stran 191, naloge 597; e,f,i,k).

Izziv 15a: Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Ali je funkcija f zvezna? Če ni zvezna, določi točke nezveznosti.



Slika 17 Nepravilno rešena naloga iz izziva 15a

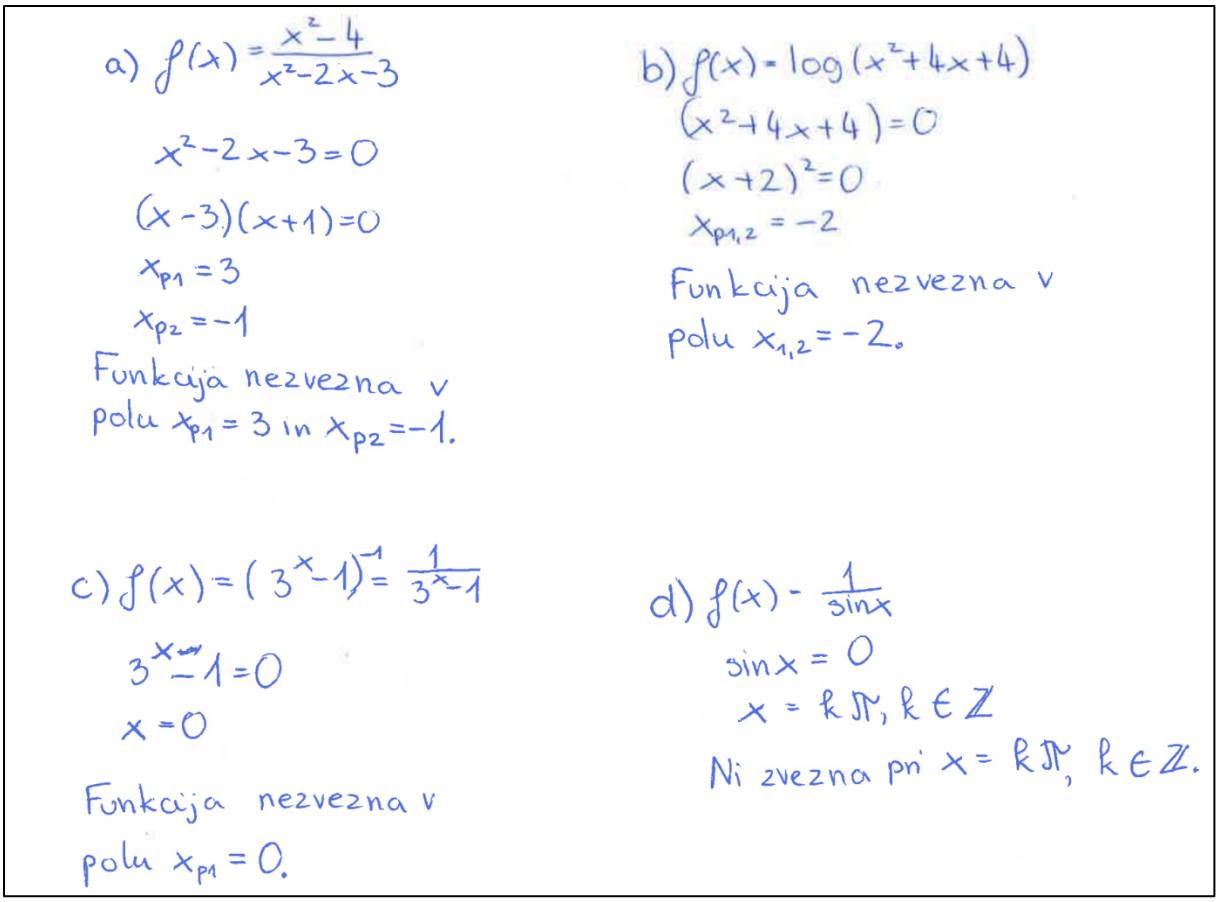
Izziv 15b: Ali so dane funkcije zvezne? Če funkcije niso zvezne, zapiši točke nezveznosti.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$

b) $f(x) = \log(x^2 + 4x + 4)$

c) $f(x) = (3^x - 1)^{-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$



Slika 18 Primer tipične rešitve naloge iz zveznosti (izziv 15b)

Komentar: Poglejmo dve definiciji zveznosti.

»Funkcija f je zvezna v $x=a$, če in samo če

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0): x\in(a-\delta,a+\delta)\Longrightarrow f(x)\in(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$.

Funkcija je zvezna na intervalu [a,b], če je zvezna v vsaki točki tega intervala.

Iz povzetka: Funkcija f je v točki a zvezna natanko takrat, ko je v točki a definirana in ima limito in je $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.« (Pavlič, 2014, str. 189).

»Funkcija f je zvezna v točki a, če je definirana v točki a in je $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.« (Bon Klanjšček, 2012, str. 98).

Glede na ti definiciji zveznosti lahko funkciji določamo zveznost le v točki, v kateri je definirana. Vse zgornje funkcije so torej zvezne in nimajo točk nezveznosti. Rešitve na slikah 17 in 18 so napačne. Na ta način je rešenih veliko nalog v učbenikih.

Vidav piše, da so racionalne funkcije nezvezne v polih: »Racionalna funkcija je kvocient dveh polinomov. Zato je povsod zvezna funkcija, razen kvečjemu v točkah, kjer je imenovalec enak nič« (Vidav, 1961, str. 142). Ta opis lastnosti racionalne funkcije ni v skladu z definicijo zveznosti. Hladnik pa navaja izrek: »Vse elementarne funkcije so zvezne, kjer so definirane«, ki ni v neskladju z definicijo zveznosti (Hladnik, str. 12).

Pobuda: Funkcija je lahko zvezna le na svojem definicijskem območju, zato je potrebno popraviti rešitve nalog v učbenikih.

2.16. Kaj je to stacionarna točka?

Kaj je točka na premici, kaj je točka v ravnini? Kaj je stacionarna točka? Kaj je ekstrem? Kako zapišemo odgovore v nalogah, ki sprašujejo po stacionarnih točkah ali po ekstremih? Problem je nakazan v izzivih 16a in 16.b.

Izziv 16a: Dana je funkcija $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Poišči stacionarne točke?

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$6x^2 - 18x + 12 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

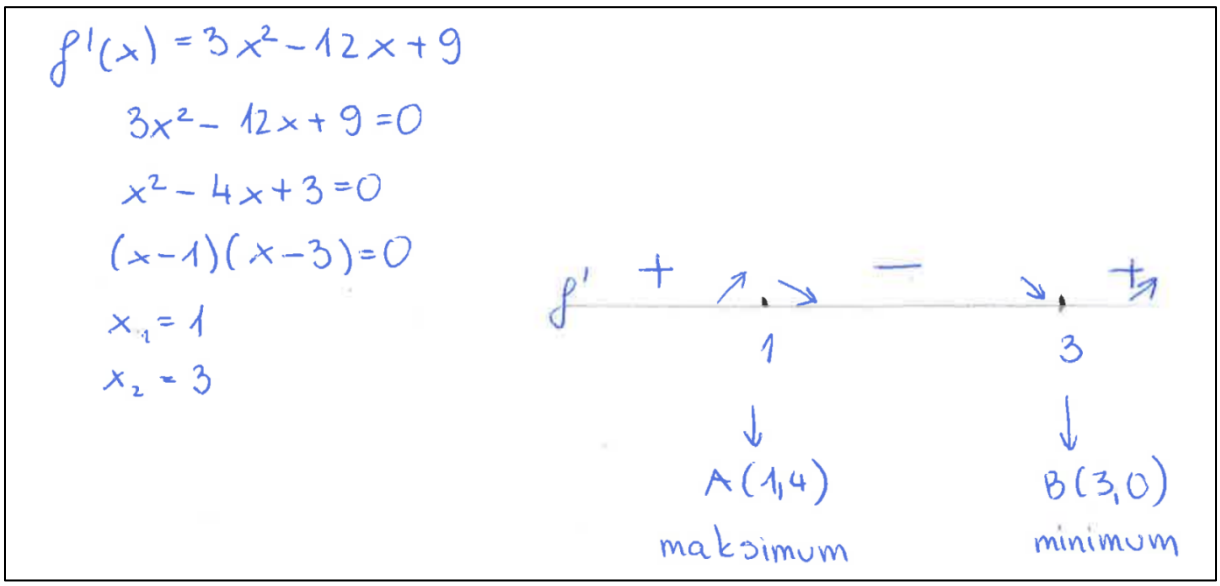
Stacionarne točke:

$x_1 = 1 \Rightarrow A(1,5)$

$x_2 = 2 \Rightarrow B(2,4)$

Slika 19 Običajna rešitev naloge iz izziva 16a

Izziv 16b: Dana je funkcija $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$. V kateri od stacionarnih točk doseže funkcija f lokalni minimum (Glej nalogo 792 c v MATEMATIKA 4)?



Slika 20 Običajna rešitev naloge iz izziva 16b

Komentar: Poglejmo definicijo stacionarne točke:

»Ničle odvoda $f'(x) = 0$ so stacionarne točke funkcije f. V stacionarni točki je tangenta na krivuljo vodoravna.« (Pavlič, 2014 str. 223)

Stacionarne točke so ničle prvega odvoda funkcije, torej vrednosti spremenljivke x, v katerih je smerni koeficient tangente na krivuljo enak 0. Dijak je v zgornji nalogi izračunal vse vrednosti x, torej je nalogo pravilno rešil, njegov odgovor pa ni bil v skladu z definicijo stacionarne točke (glej sliko 19).

Podobno je s pojmoma minimum in maksimum. To sta funkcijski vrednosti pri tistih vrednostih x, kjer funkcija zavzame ekstremno vrednost.

V učbeniku TEMPUS novum je lokalni maksimum definiran takole: »Funkcija f ima v $x = x_0$ lokalni maksimum, če velja $f(x) < f(x_0)$ za vsak x iz dovolj majhne okolice točke x_0.« Definicija lokalnega minimuma je analogna. V vrstici pred tem pa piše: »Točka, kjer funkcija lokalno gledano (v dovolj majhni okolici) zavzame največjo ali najmanjšo vrednost, se imenuje lokalni ekstrem.« Iz tega ne moremo sklepati, kaj je mišljeno z ekstremom: ali le funkcijska vrednost ali točka na grafu. V zgledih z nalogo »Poišči ekstreme« je odgovor zapisan na primer: »Pri x=2 ima polinom lokalni minimum« ter »Doseže pa minimum pri x=1, in sicer y = -1«.

V rešitvah nalog so minimumi in maksimumi navedeni kot točke v ravnini $(x_1, f(x_1))$. Drugi primer zapisa rešitev je po našem mnenju korekten. V učbeniku MATEMATIKA 4 je podobno. Rešitev izziva 16b na sliki 20 ni zapisana v skladu z definicijo ekstrema (lokalnega minimuma).

Pobuda: V nalogah je potrebno razlikovati med pojmoma stacionarna točka, lokalni ekstrem funkcije ter točkami na grafu funkcije, v katerih doseže funkcija ekstremno vrednost. Prva je vrednost spremenljivke x, v kateri je $f'(x) = 0$, lokalni ekstrem funkcije je funkcijska vrednost, kjer funkcija lokalno gledano doseže največjo ali najmanjšo vrednost. Poimenovanja za točko na grafu, kjer funkcija doseže ekstrem, v omenjenih učbenikih, ni. Če hočemo točko na grafu, bi morali v navodilu naloge zapisati, na primer: »Zapiši točke na grafu, v katerih doseže funkcija ekstremno vrednost«. Pri večini rešitev nalog so že navedene točke na grafih.
Predlagamo, da se v učbenikih poenoti vprašanja in zapis rešitev nalog.

2.17. Kaj je nedoločeni integral: funkcija ali družina funkcij?

V tem razdelku iščemo odgovor na vprašanje, ali je nedoločni integral dane funkcije f ena sama funkcija F, ki zadošča pogoju, da je $F' = f$, ali JE nedoločeni integral družina funkcij. Različni učbeniki predlagajo različne rešitve. Oglejmo si primer opisan v izzivu 17.

Izziv 17: Izračunaj nedoločeni integral funkcije $f(x) = x^2$.

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

Slika 21 Rešitev naloge iz izziva 17

Komentar: V učbeniku TEMPUS novum je nedoločeni integral definiran takole: »Radi bi našli obratno operacijo odvajanju. Iskani funkciji rečemo primitivna funkcija ali nedoločeni integral« (Pavlič, 2014, str. 269). Torej je dovolj, če za nedoločeni integral dane funkcije poiščemo eno izmed funkcij, katere odvod je enak dani funkciji. Naloga je torej rešena pravilno. Rezultat bi seveda lahko bil tudi na primer: $\frac{x^3}{3} + 1$ **ali** $\frac{x^3}{3} - 100$ **ali** $\frac{x^3}{3} + C, C \in R$.

V učbeniku MATEMATIKA 4 je nedoločeni integral funkcije $\boldsymbol{f}$ definiran kot »družina funkcij $F(x)+c, c \in R$, katerih odvod je enak funkciji $\boldsymbol{f}$: $\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}$. Velja $\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}$.«

V Višji matematiki 1 (Vidav, 1961, str. 204) je nedoločeni integral definiran takole: »Integrirati funkcijo $f(x)$ se pravi, poiskati tako funkcijo $F(x)$, ki ima za odvod dano funkcijo $f(x)$, torej $F'(x) = f(x)$… Vsako funkcijo $F(x)$, ki je njen odvod enak $f(x)$, imenujemo nedoločeni integral funkcije $f(x)$. Dejstvo, da je $F(x)$ integral funkcije $f(x)$, zapišemo takole: $F(x) = \int f(x)\,dx$.«

Glede na ta vir je nedoločeni integral ena funkcija in ne družina funkcij. O družini nedoločenih integralov isti vir navaja: »Če je $F(x)$ kak integral funkcije $f(x)$, dobimo vsak drug njen integral tako, da funkciji $F(x)$ prištejemo primerno konstanto.« »Ker je z danim odvodom $f(x)$ funkcija $F(x)$ določena samo do aditivne konstante, jo imenujemo nedoločeni integral.«

Rešitev izziva 17 na sliki 21 bi bila različno vrednotena glede na različne definicije v učbenikih. Z matematičnega vidika pa je pravilna, saj je dovolj, da poiščemo eno primitivno funkcijo. Vse ostale se razlikujejo le za aditivno konstanto.

Pobuda: Predlagamo, da se definicija nedoločenega integrala poenoti, na primer:

DEFINICIJA nedoločenega integrala:

Naj bo funkcija $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. *Nedoločeni integral* funkcije $\boldsymbol{f}$ je množica funkcij $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$, za katere velja $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$:

$$\int \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{F}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R} | \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}\}$$

Vsaki funkciji $\boldsymbol{F}$ iz te množice pravimo *primitivna funkcija*.

Velja izrek: Če je $\boldsymbol{F}$ primitivna funkcija, potem je za vsak $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}$ tudi funkcija $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{C}$ primitivna funkcija: $\boldsymbol{F} \in \int \boldsymbol{f} \Longrightarrow \forall \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}: \boldsymbol{F} \in \int \boldsymbol{f}$.

Dokaz: Ker je $\boldsymbol{F}$ primitivna funkcija, velja $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$. Potem je za vsak $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}$: $(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{C})' = \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$.

Zapišemo takole: $\int \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{F} + \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{R}\}$. Definicijski območji funkcij $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{F}$ se morata ujemati.

Po tem, nekoliko drznem predlogu, ločimo nedoločeni integral kot množico funkcij in posamezno funkcijo iz te množice, ki ji rečemo primitivna funkcija. Če bi bila naloga:

Izračunaj: $\int x^2 \mathrm{d}x$, bi bili rešitvi s $+C$ in brez $+C$ obe pravilni.

Če bi bila naloga: Poišči primitivno funkcijo k funkciji f s predpisom $f(x) = x^2$, bi bila rešitev vsaka posamezna funkcija F z lastnostjo $F' = f$, na primer $\frac{x^3}{3} + 1$ ali $\frac{x^3}{3} - 2018$ ali tudi $\frac{x^3}{3} + C, C \in R$, saj je le-ta za vsak C , $C \in R$ primitivna funkcija.

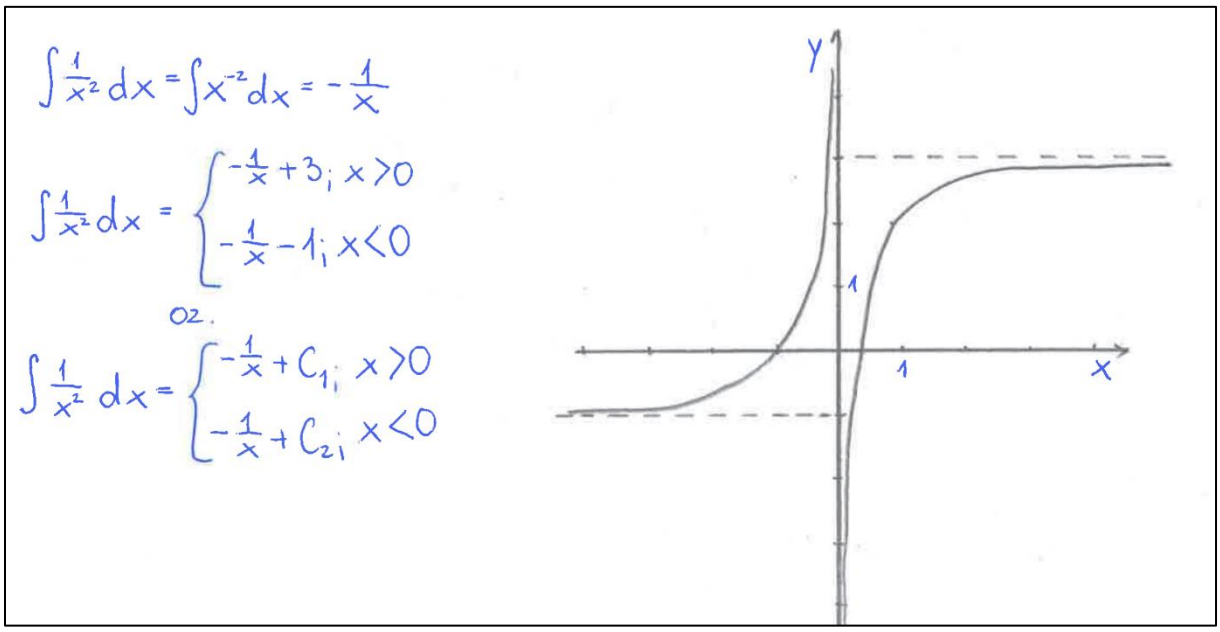
Rešitev naloge: Poišči nedoločeni integral funkcije f s predpisom $f(x) = x^2$ pa bi bila

$\int x^2 \mathrm{d}x = \{\frac{x^3}{3} + C, C \in R\}$.

2.18. Nedoločeni integral funkcije, ki ima pole

Vemo, da se dve primitivni funkciji razlikujeta za aditivno konstanto C, zato množico vseh nedoločenih integralov zapišemo v obliki $\int f(x)dx = F(x) + C$. To pomeni, da vsako funkcijo iz te množice dobimo s premikom navzgor ali navzdol. Zastavimo pa si vprašanje, ali lahko pri nedoločenih integralih funkcij, ki imajo pole, na vsaki posamezni veji uporabimo različen premik. Primer je prikazan v izzivu 18.

Izziv 18: Poišči nedoločeni integral funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$?



Slika 22 Nenavadna rešitev naloge iz izziva 18

Komentar: Navajeni smo na zapis nedoločenega integrala z eno konstanto *C*. Če ima funkcija pole, pa si na posameznem (celotnem) intervalu definicijskega območja lahko izberemo različni konstanti. Vse primitivne funkcije morajo imeti enaka definicijska območja, premiki navzgor in navzdol na različnih intervalih pa so lahko različni, le da je odvod na posameznem intervalu enak integralu. Rešitev z dvema integracijskima konstantama C_2 in C_2 je tudi v redu, saj še bolj poudari, da sta konstanti na podintervalih različni. Opisano velja za funkcije, ki imajo pole. Rešitev izziva 18 na sliki 22 je pravilna.

Zapišimo na ta način še nedoločeni integral funkcije f s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Torej je

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x + c, c \in R; \text{če je } x > 0 \\ \ln|x| + d, d \in R; \text{če je } x < 0 \end{cases}$$

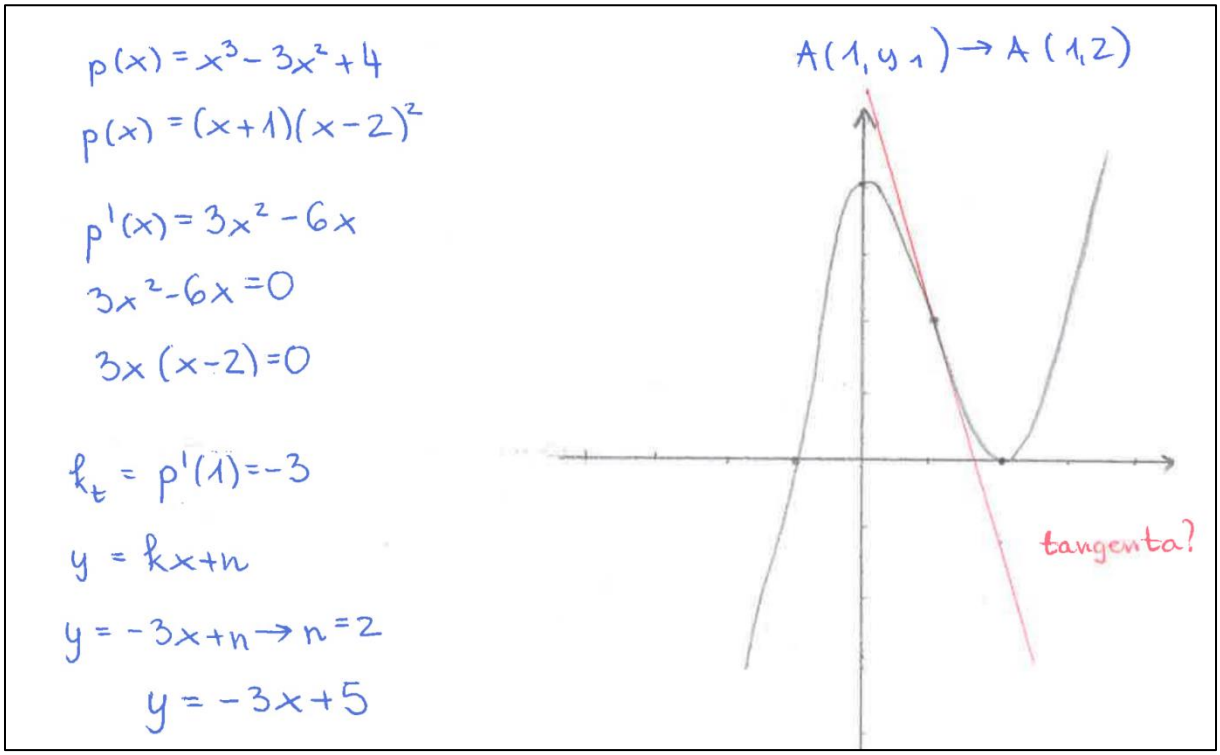
V tabelah je zapisan nedoločeni integral $\int \frac{1}{x}\,dx = ln\,|x| + C$, kar je seveda pravilno, saj samo pomeni, da si lahko na posameznem intervalu definicijskega območja izberemo različni konstanti.

Pobuda: Pri obravnavi integralov elementarnih funkcij je prav, da se seznanimo tudi z nedoločenim integralom funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, zapisanim na predlagani način z dvema aditivnima konstantama.

2.19. Ali lahko tangenta na krivuljo v dotikališču seka krivuljo?

Domnevamo, da smo pojem tangente prenesli iz tangente krožnice na tangento krivulje (na tangento na graf funkcije). V naši predstavah je ostala tangenta kot dotikalnica, tangenta iz naloge v izzivu 19 pa seka graf funkcije v dotikališču.

Izziv 19: Dan je polinom p s predpisom $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Zapiši enačbo tangente v točki $A(1, y_1)$. Nariši graf polinoma in tangento.



Slika 23 Rešitev naloge iz izziva 19

Komentar: Naloga je rešena pravilno, vendar pojem tangenta ni v skladu s predstavo, da je tangenta premica, ki se dotika grafa funkcije (splošnejše krivulje). Poiskati moramo definicijo tangente, ki bo skladu z nalogami. V obravnavanih učbenikih sploh ni definicije tangente.

Pobuda: Predlagamo, da se v gimnazijske učbenike vključi definicija tangente na graf funkcije:

DEFINICIJA tangente: Tangenta na graf funkcije f v točki $(a, f(a))$ na krivulji je premica, ki gre skozi točko $(a, f(a))$ in je njen smerni koeficient enak $f'(a)$.

Rešitev izziva 19 na sliki 23 je pravilna.

3. ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo se poglobili v srednješolske učbenike za matematiko in v njih poiskali neskladja, ki smo jih v nalogi tudi predstavili. Pri tem smo se skušali vživeti v vlogo dijaka, ki rešuje naloge, vprašali smo se tudi, kako bi bilo z vrednotenjem dijakovih izdelkov v primeru uporabe drugega učbenika. Neskladja smo opisali in napisali pobudo za rešitev problema.

Menimo, da smo zastavljene cilje dosegli. Našli smo preko dvajset neskladij. Pobude smo utemeljevali s pomočjo tuje in slovenske literature, v kateri se nam je zdela nakazana boljša pot za rešitev problema, preko pogovorov in razprav o neskladjih pa smo prišli do določenih sklepov.

Nekatera neskladja smo v nalogi poenostavili, saj so se posamezni problemi izkazali za globlja, kot smo sprva predvidevali. Ko smo se poglabljali v posamezen problem, smo naleteli tudi na matematična ozadja, ki presegajo naše znanje. Nalogo bi lahko še razširili in se pri določeni temi zadržali še veliko več časa, iskali izvore samih pojmov ter povezave med tujimi učbeniki, kar pa bi verjetno prineslo tudi uvedbo novih matematičnih pojmov in oznak.

Zavedamo se, da najverjetneje nismo našli vseh neskladij v in med obravnavami učbeniki. Menimo, da bi bil potreben bolj strokovni pogled na omenjena in druga neskladja. Predlagamo, da bi bilo dobro slovenske učbenike za matematiko poenotiti. Prav tako predlagamo, da bi slovenski matematiki napisali slovenski matematični terminološki slovar.

4. VIRI IN LITERATURA

[1] Benko, D.: Predmetni izpitni katalog za splošno maturo – MATEMATIKA. RIC, Ljubljana, 2016.

[2] Bon Klanjšček, M.: Matematika 1: učbenik za gimnazije. DZS, Ljubljana, 2009.

[3] Bon Klanjšček, M.: Matematika 2: učbenik za gimnazije. DZS, Ljubljana, 2010.

[4] Bon Klanjšček, M.: Matematika 3: učbenik za gimnazije. DZS, Ljubljana, 2011.

[5] Bon Klanjšček, M.: Matematika 4: učbenik za gimnazije. DZS, Ljubljana, 2012.

[6] Ivanec, D.: VEGA 2 - i-učbenik za matematiko v 2. letniku gimnazije. ZRSSS, Ljubljana, 2014.

[7] Langford, E.: Quartiles in Elementary Statistics. Journal of Statistics Education Volume 14, Number 3 (2006). Dostopno na svetovnem spletu na naslovu: http://ww2.amstat.org/publications/jse/v14n3/langford.html

[8] Mohorčič, A.: VEGA 1 - i-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazije. ZRSSS, Ljubljana, 2014.

[9] Škrlec, M.: VEGA 3 - i-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazije. ZRSSS, Ljubljana, 2015.

[10] Pavlič, G.: LINEA nova: matematika za gimnazije. Modrijan, Ljubljana, 2011.

[11] Pavlič, G.: PLANUM novum: matematika za gimnazije. Modrijan, Ljubljana, 2012.

[12] Pavlič, G.: SPATIUM novum: matematika za gimnazije. Modrijan, Ljubljana, 2013.

[13] Pavlič, G.: TEMPUS novum: matematika za gimnazije. Modrijan, Ljubljana, 2014.

[14] Vidav, I.: Višja matematika 1. DZS, Ljubljana, 1961.

[15] Žerovnik, J.: Računanje kvartilov v elementarni statistiki, članek. Obzornik za matematiko in fiziko. Letnik 64, št. 1, stran 20-31. Ljubljana, 2017.

Internetni viri:

[16] Hladnik, M.: *Limita in zveznost funkcij*. Dostopno na svetovnem spletu na naslovu https://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/Analiza/ZveznostFunkcij11.pdf. Obiskano 15.1.2018.

[17] The MathForum of NCTM: Dostopno na svetovnem spletu na naslovu http://mathforum.org/library/drmath/view/74773.html. Obiskano 12. 1. 2018.

[18] Wikipedija: *Piramida.* Dostopno na svetovnem spletu na naslovu https://sl.wikipedia.org/wiki/Piramida_(geometrija). Obiskano 25.11.2017

Kazalo slik

Slika 1 Dijakovo reševanje naloge iz izziva 1 5
Slika 2 *»Pokončna« piramida iz izziva 1* 6
Slika 3 Odgovor dijaka ob reševanju naloge iz izziva 2 8
Slika 4 Primer nepopolne rešitve naloge iz izziva 3 9
Slika 5 Neobičajno pravilno zaokrožanje 11
Slika 6 Primer »zaokrožanja« na decimalna mesta in na mesta 12
Slika 7 Možna rešitev naloge iz izziva 5 14
Sliki 8a in 8b Predloga in ena izmed rešitev naloge iz izziva 6 15
Slika 9 Primer pravilne rešitve naloge iz izziva 7 17
Slika 10 Primer dijakove rešitve naloge iz izziva 8 19
Slika 11 Primer dijakove rešitve naloge iz izziva 9 21
Slika 12 Običajna rešitev naloge iz izziva 10 22
Slika 13 Primer rešitve naloge iz izziva 11 24
Slika 14 Vse rešitve problema iz izziva 12 25
Slika 15 Dijakovo reševanje naloge iz izziva 13 26
Slika 16 Pravilna rešitev naloge iz izziva 14 27
Slika 17 Nepravilno rešena naloga iz izziva 15a 29
Slika 18 Primer tipične rešitve naloge iz zveznosti (izziv 15b) 30
Slika 19 Običajna rešitev naloge iz izziva 16a 31
Slika 20 Običajna rešitev naloge iz izziva 16b 32
Slika 21 Rešitev naloge iz izziva 17 33
Slika 22 Nenavadna rešitev naloge iz izziva 18 35
Slika 23 Rešitev naloge iz izziva 19 36