

Raziskovalna naloga

DOPOLNUJOČI SE SKUTOIDI

Avtorji: Eva Brumat

Samo Fučka

Domen Vovk

Mentor: mag. Alojz Grahov, prof. mat.

Področje: SŠ Matematika

Škofijska gimnazija Vipava, april 2019

Zahvala

Zahvaljujemo se:

- mentorju mag. Alojzu Grahorju za spodbude in usmerjanje pri izdelavi raziskovalne naloge,
- prof. Polonci Zupančič za lektoriranje raziskovalne naloge,
- prof. Sonji Matelič za pregled prevoda povzetka v angleščino in
- študentu strojništva Matjažu Vovku za pomoč pri učenju uporabe programa SOLIDWORKS.

Prav tako se zahvaljujemo sponzorjem za brezplačno 3D tiskanje modelov skutoidov, in sicer:

- Učno Izdelovalnemu laboratoriju v Novi Gorici,
- Goriški knjižnici Franceta Bevka (oddelek Mojstrovalnica),
- podjetju 3WAY iz Medvod in
- podjetju Audax iz Ljubljane.

Kazalo

Povzetek	3
Abstract	4
1 UVOD.....	5
1.1 O »NASTANKU« GEOMETRIJSKEGA TELESA SKUTOID	5
1.2 SPLOŠNA DEFINICIJA SKUTOIDA	8
1.3 CILJI NALOGE	8
1.4 METODE DELA.....	8
2 NAVADNI SKUTOID 5-6	9
2.1 Definicija	9
2.2 Opis geometrijskih lastnosti navadnega skutoida 5-6	10
2.3 Mreža navadnega skutoida 5-6.....	10
3 DOPOLNUJOČI SE SKUTOIDI.....	11
3.1 Dopolnjujoči se skutoid 5-6	11
3.1.1 Definicija.....	11
3.1.2 Opis geometrijskih lastnosti	12
3.1.3 Mreža dopolnjujočega se skutoida 5-6	14
3.1.4 Verige dopolnjujočih se skutoidov 5-6	15
3.2 Dopolnjujoči se skutoid 4-5	16
3.2.1 Definicija.....	16
3.2.2 Opis geometrijskih lastnosti	17
3.2.3 Mreža dopolnjujočega se skutoida 4-5	18
3.2.4 Verige dopolnjujočih se skutoidov 4-5	19
3.3 Dopolnjujoči se skutoid 3-4	19
3.3.1 Definicija.....	19
3.3.2 Opis geometrijskih lastnosti	21
3.3.3 Mreža dopolnjujočega se skutoida 3-4	23
3.3.4 Verige skutoidov 3-4.....	24
3.4 Izračun dolžine kraka skuteluma dopolnjujočega se skutoida v splošnem	24
4 POVEZOVANJE RAZLIČNIH SKUTOIDOV	26
5 MOŽNA PODROČJA UPORABE SKUTOIDOV	26
5.1 Modeliranje celic krovnih tkiv.....	26
5.2 Popolno zapolnjevanje prostora	27
5.3 Skutoidi kot ustvarjalna igrača	27

Dopolnjujoči se skutoidi

5.4	Skutoidi v umetnosti in oblikovanju.....	28
6	ZAKLJUČEK	28
7	VIRI IN LITERATURA	28
8	KAZALO SLIK IN PRILOG	29
	PRILOGE	31

Povzetek

Konec julija 2018 so raziskovalci z Univerze v Sevilli in z Univerze Lehigh (ZDA) objavili članek z naslovom »Skutoidi so geometrijska rešitev trodimenzionalne zapolnitve krovnega tkiva« (*Scutoids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia*). Ključno vlogo pri rešitvi tega problema je odigralo odkritje novega geometrijskega telesa, ki so ga poimenovali skutoid (ang. *scutoid*). Skutoid je telo, podobno prizmi, ki ima za osnovni ploskvi različna n -kotnika na vzporednih ravninah, stranski robovi so daljice ali kakšna druga krivulja, vsaj ena povezava pa je v obliki črke Y. Ploskve so lahko ukrivljene. Omenjeni raziskovalci uporabljajo skutoide za modeliranje povezovanja celic v krovnem tkivu. V raziskovalni nalogi smo opazovali skutoide v prostoru med dvema vzporednima ravninama in jih obravnavali z matematičnega vidika. Pri definiciji smo se omejili na takšne skutoide, pri katerih sta osnovni ploskvi n in $n+1$ pravilna večkotnika, povezave oglisč pa so daljice. Iskali smo tiste skutoide, ki se v paru dopolnjujeta v ploskvah ob Y. V dostopnih virih opisujejo le skutoid, ki ima za osnovni ploskvi pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik. Imenovali smo ga dopolnjujoči se skutoid 5-6. Cilj raziskovalne naloge je bil konstruirati ta skutoid in opisati njegove geometrijske lastnosti. Poleg tega pa smo konstruirali in opisali lastnosti dopolnjujočih se skutoidov 4-5 ter 3-4 in raziskovali, kako se med seboj povezujejo.

Ključne besede: skutoid, skutelum, zapolnitev prostora, krovno tkivo.

Abstract

At the end of July 2018, researchers from the University of Seville and Lehigh University (USA) published an article titled »Scutoids are a geometric solution to three-dimensional packing of epithelia«. The solution to the problem of packing epithelia cells in curved shapes was the discovery of a new geometric shape – the scutoid. The scutoid is a solid similar to the prism, whose base surfaces are two different parallel n -gons, the side edges are line segments or some other suitable curves of which at least two form the connection in the shape of the letter Y. That is necessary because of the different number of vertices in the base surfaces. The surfaces of the scutoid can be curved, which enables them to be used for the modelling of the way cells in the epithelial tissues connect.

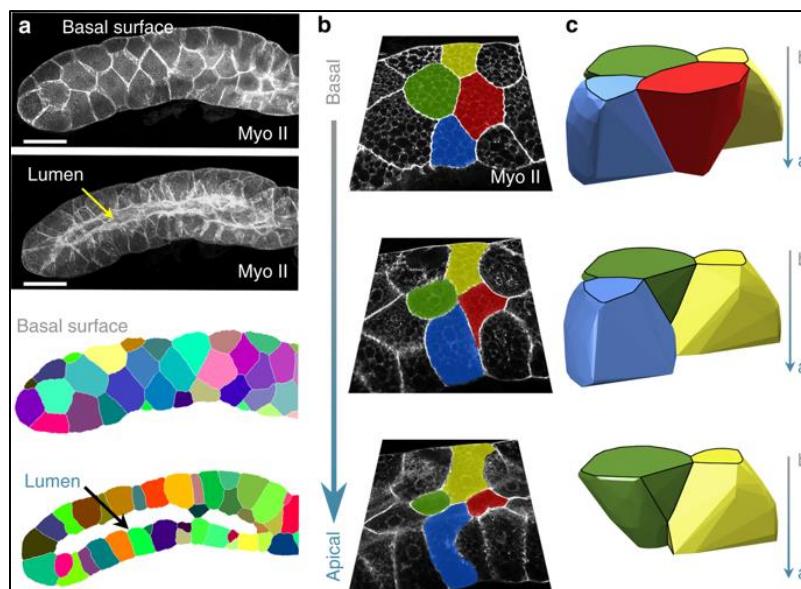
In our research project, scutoids were observed in spaces between two parallel planes and were analysed from mathematical aspects. The definition was limited to those scutoids whose basic surfaces are the correct polygons with n and $n + 1$ vertices, which are connected with line segments. We searched for those scutoids which supplement each other in pairs alongside the surfaces surrounding Y. In the sources available, the only scutoid described is the one with a pentagon and a hexagon as its base surfaces, which we named the complementary 5-6 scutoid. The aim of the research project was to design and analyse the complementary 5-6 scutoid. In addition, two other scutoids were constructed, the complementary scutoid 4-5 and the complementary scutoid 3-4. Their properties were described and the way in which they connect in pairs was researched.

Key words: *scutoid, scutellum, space packing, epithelia.*

I UVOD

I.1 O »NASTANKU« GEOMETRIJSKEGA TELESA SKUTOID

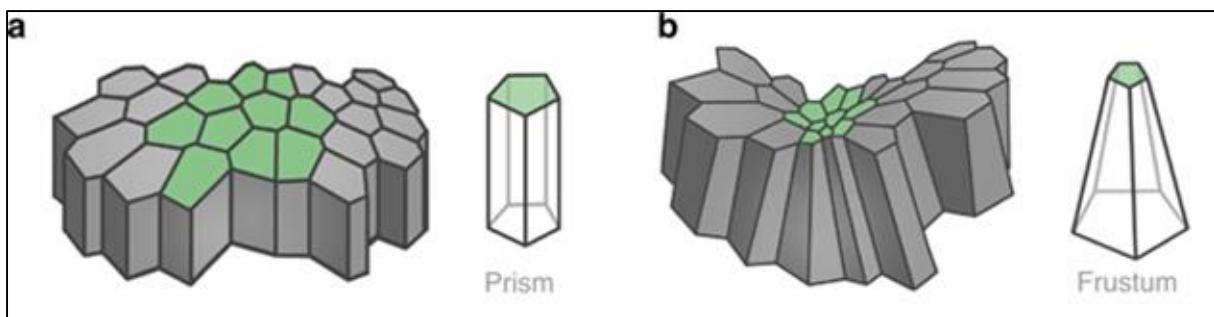
Geometrijsko telo (prostorska oblika) skutoid (ang. *scutoid*) je bil prvič opisan julija 2018 v članku *Scutoids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia*, kjer so raziskovalci Pedro Gómez-Gálvez in sodelavci z Univerze v Sevilli ter z Univerze Lehigh (ZDA) objavili svoje raziskave o tem telesu (Gomez, 2018). V tem poglavju povzemamo glavne ugotovitve iz tega članka. Do odkritja skutoida je prišlo med preučevanjem trodimenzionalne zgradbe epitelnih celic oz. krovnega tkiva, pri čemer jih je posebej zanimalo, kakšna oblika omogoča celicam, da tvorijo ukrivljeno tkivo cilindrične, sferične ali elipsoidne oblike. Ključnega pomena je bilo epitelsko zlaganje s sledenjem posameznih celic (slika 1), pri katerem so prišli do spoznanja, da celice v ravnini epitela spreminjajo obliko.



Slika 1: Epitelsko zlaganje celic (Vir: Gomez, 2018)

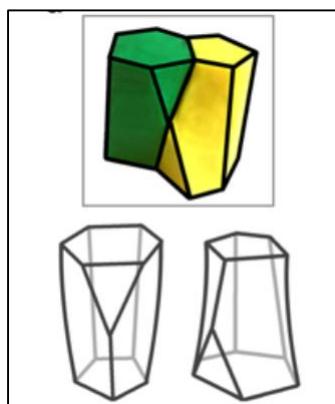
Tako so najprej sestavili modele epitela iz prizem (slika 2.a) in iz prisekanih piramid, t. i. frustum (slika 2.b), kasneje pa so to idejo zavrgli, saj so pridobili dokaze, da imajo celice na različnih globinah drugačne sosedje.

Dopolnjujoči se skutoidi



Slika 2: Modeliranje krovnega tkiva s prizmami in prisekanimi piramidami (Vir: Gomez, 2018)

S pomočjo teoretičnih, računskih in eksperimentalnih podatkov so skonstruirali novo telo, katerega oblika se je kasneje z računanjem membranskih potencialov za celice izkazala za energetsko najbolj učinkovito, kar je samo še potrdilo njihovo hipotezo. To telo so poimenovali skutoid (slika 3).

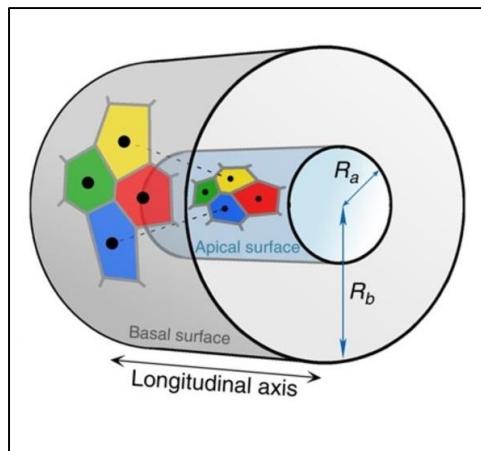


Slika 3: Novo telo – skutoid (Vir: Gomez, 2018)

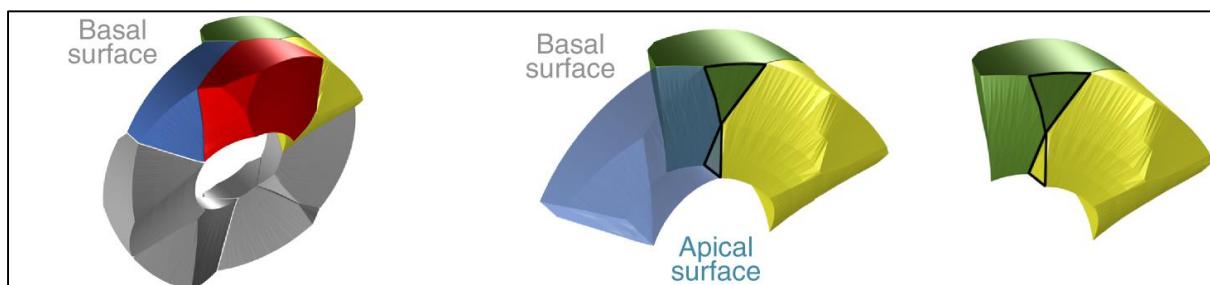
Pomembna lastnost skutoidov je tudi, da v primerjavi s prizmami in prisekanimi piramidami njihove ploskve niso nujno konveksne, saj je njihova konkavnost bistvenega pomena pri trodimenzionalnem sestavljanju (dopolnjevanju) celic v ukrivljenem tkivu (glej sliko 1).

Pri modeliranju celic krovnega tkiva so si pomagali z Voronojevim diagramom, ki je v osnovi ravnina s točkami (semeni), razdeljena na regije. Posamezna regija vsebuje vse točke ravnine, ki so bližje semenu v regiji kot kateremukoli drugemu semenu. Najprej so določili pozicije semen na spodnji in zgornji ravnini epitela (slika 4), potem pa izračunali Voronijev diagram semen na vsaki od vzporednih površin. Posamezne regije so nato povezali in tako pridobili trodimenzionalno sliko (slika 5).

Dopolnjujoči se skutoidi

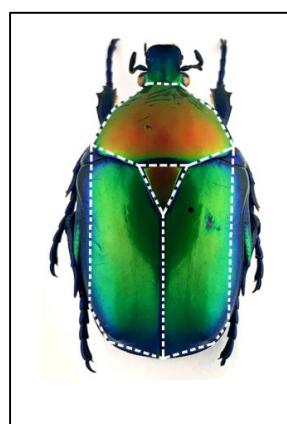


Slika 4: Skica Voronijevih diagramov na spodnji in zgornji plasti krovnega tkiva (Vir: Gomez, 2018)



Slika 5: Modeliranje celic v krovnem tkivu s skutoidi (Vir: Gomez, 2018)

Telo so poimenovali po podobnosti s skutelum oblikami oprsja ali toraksa nekaterih žuželk, na primer s *Cetoniidae*, poddržino hroščev (slika 6). Gre za ščit, ki je oblikovan kot enakokraki trikotnik.



Slika 6: Primer hroščka iz rodu *Cetoniidae*, kjer je viden trikotni ščitek – skutelum (Vir: Gomez, 2018)

1.2 SPLOŠNA DEFINICIJA SKUTOIDA

Skutoid je telo, podobno prizmi, ki ima za osnovni ploskvi različna n -kotnika na vzporednih ravninah, stranski robovi so daljice ali kakšna druga krivulja, vsaj ena povezava pa je v obliki črke Y. Ploskve so lahko ukrivljene (glej sliko 1.c). V raziskovalni nalogi smo opazovali skutoide v prostoru med dvema vzporednima ravninama in jih obravnavali z matematičnega vidika. Pri definiciji smo se omejili na takšne skutoide, pri katerih sta osnovni ploskvi n in $n+1$ pravilna večkotnika, povezave oglišč so daljice, ena povezava pa je v obliki črke Y. Iskali smo tiste skutoide, ki se v paru dopolnjujeta v ploskvah ob Y. V dostopnih virih opisujejo le skutoid, ki ima za osnovni ploskvi pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik. Imenovali smo ga skutoid 5-6. Enakokraki trikotnik, ki ga določa Y, bomo imenovali skutelum. Tako se namreč imenuje trikotnik v ogrodju žuželk (glej sliko 6).

1.3 CILJI NALOGE

Skutoid 5-6 je v literaturi opisan dokaj površno. Iz članka (Gomez, 2018) je namreč razvidno, da se dva skutoida po obratu enega dopolnjujeta v ploskvi ob Y (glej sliko 3). Tak skutoid, ki ima lastnost, da se v paru dopolnjujeta s ploskvijo ob Y, smo poimenovali *dopolnjujoči se skutoid 5-6*.

Cilj raziskovalne naloge je bil konstruirati dopolnjujoči se skutoid 5-6 in opisati njegove geometrijske lastnosti. Poleg tega je bil cilj konstruirati in opisati lastnosti dopolnjujočih se novih skutoidov 4-5 ter 3-4 in raziskovati, ali in kako se med seboj dopolnjujejo. Privzeli smo tezo, da imajo vsi skutoidi med seboj enako višino in enako dolge stranice osnovnih ploskev.

1.4 METODE DELA

V literaturi nismo zasledili poteka konstrukcije. Zato smo se odločili, da bomo skutoide konstruirali in eksperimentirali s programom za trodimenzionalno risanje. Odločili smo se za program SOLIDWORKS in pri tem uporabili študentsko verzijo 2018. Poleg tega smo modele natisnili s 3D tiskalnikom. Vse to nam je omogočilo lažje postavljanje novih matematičnih in

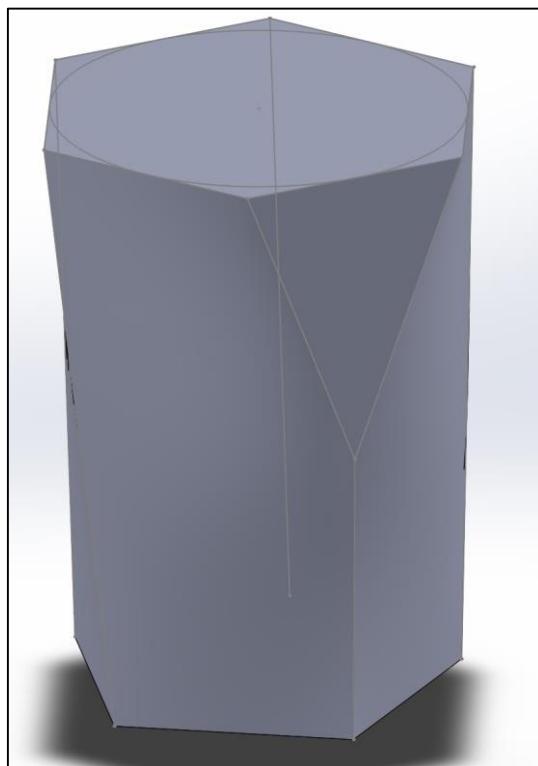
Dopolnjujoči se skutoidi

drugih izzivov, ki smo jih potem matematično dokazali/izračunali (kjer je bilo mogoče). Pri risanju ravninskih situacij smo uporabljali program Geogebra, za daljše izračune pa program Derive 6.

2 NAVADNI SKUTOID 5-6

2.1 Definicija

Navadni skutoid 5-6 je geometrijsko telo, ki ga določata pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik na vzporednih ravninah. Oglisča so povezana z daljicami ter s povezavo v obliki črke Y zaradi različnega števila oglisč. Povezava Y ja takšna, da središče Y leži na polovici višine skutoida, kraki Y pa ležijo v isti ravnini. Osnovica skuteluma (ena izmed stranic šestkotnika) je vzporedna s tisto stranico petkotnika na drugi ravnini, ki leži nasproti Y (glej sliko 7).



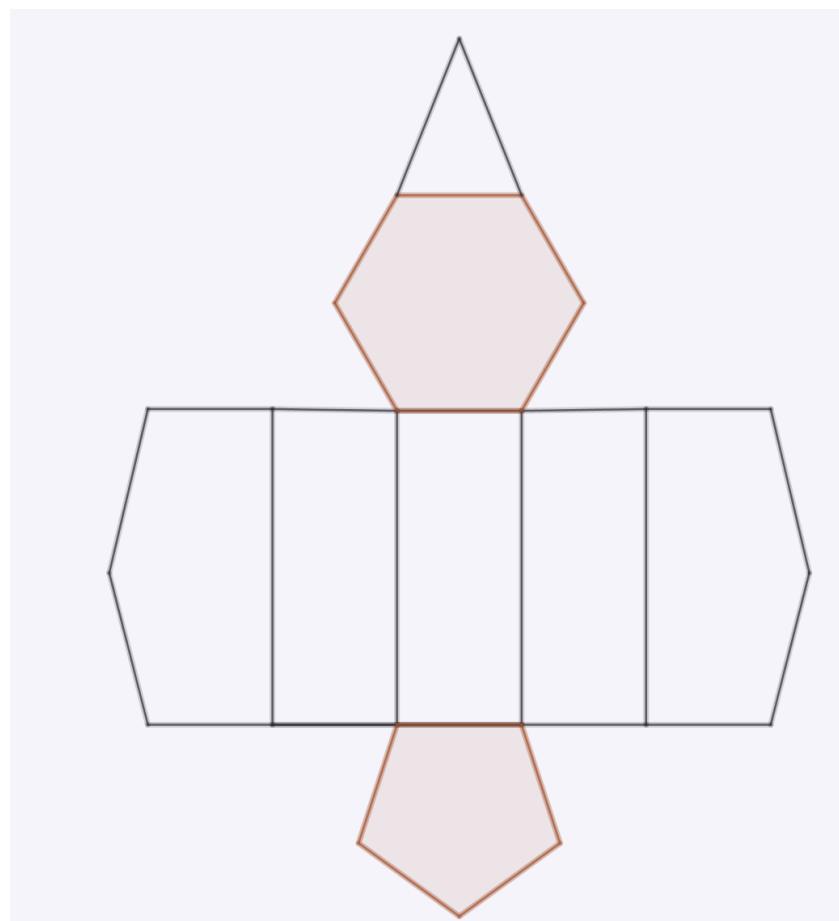
Slika 7: Navadni skutoid 5-6

2.2 Opis geometrijskih lastnosti navadnega skutoida 5-6

Poleg lastnosti, ki jih zahteva definicija, je ploskev nasproti Y pravokotnik, katerega ravnina ni pravokotna na ravnino osnovne ploskve. Ostale stranske ploskve niso pravokotniki, saj vse njihove stranice ne ležijo v isti ravnini. Program SOLIDWORKS je sam izbral neko ukrivljeno ploskev. Ker kraki na povezavi Y niso enako dolgi, se par navadnih skutoidov ne dopolnjuje s ploskvama ob Y (ko enega obrnemo narobe). Edina možna povezava je dopolnjevanje v ploskvah nasproti Y (glej fotografijo I v prilogi I).

2.3 Mreža navadnega skutoida 5-6

Narisali smo približno mrežo navadnega skutoida 5-6. Približno zato, ker so nekatere ploskve ukrivljene in jih ne moremo zravnati v ravnino (slika 8).



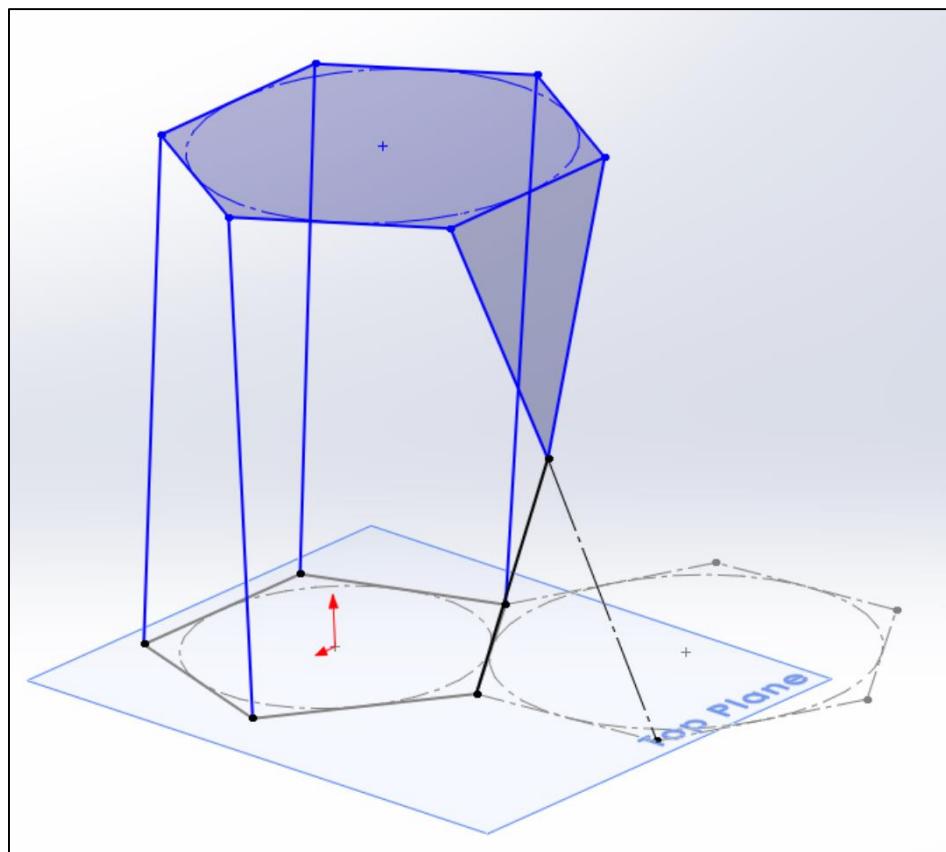
Slika 8: Približna mreža navadnega skutoida 5-6

3 DOPOLNUJOČI SE SKUTOIDI

3.1 Dopolnjujoči se skutoid 5-6

3.1.1 Definicija

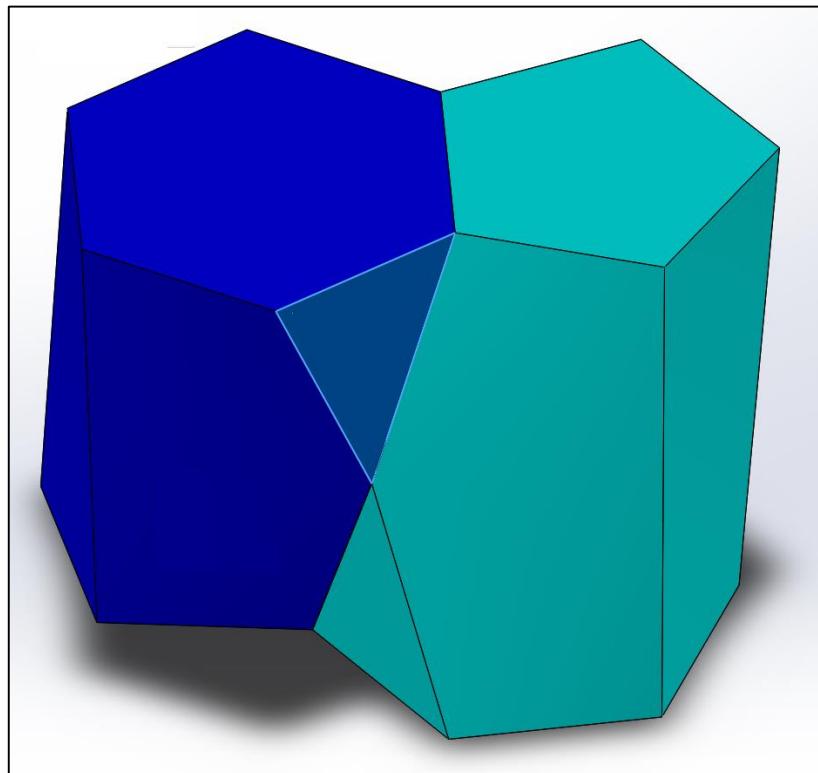
Dopolnjujoči se skutoid 5-6 je geometrijsko telo, ki ga določata pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik z enakimi stranicami na vzporednih ravninah. Oglešča so povezana z daljicami ter s povezavo v obliki črke Y zaradi različnega števila oglšč. Povezava Y-ja takšna, da središče Y leži na polovici višine skutoida, kraki Y pa so enako dolgi z dodatno lastnostjo, da se par teh skutoidov 5-6 dopolnjuje s ploskvama ob Y. Osnovica skuteluma (ena izmed stranic šestkotnika) je vzporedna s tisto stranico petkotnika na drugi ravnini, ki leži nasproti Y (glej sliko 9). Da zadostimo pogojem dopolnjevanja, moramo pri konstrukciji dopolnjujočega se skutoida 5-6 upoštevati tudi spodnji skutelum, da se bosta ploskvi natanko ujemali. Na sliki 9 je prikazana najpomembnejša faza pri konstrukciji dopolnjujočega se skutoida 5-6.



Slika 9: Bistvena faza konstruiranja dopolnjujočega se skutoida 5-6

3.1.2 Opis geometrijskih lastnosti

Zaradi same konstrukcije smo dosegli, da se ploskvi ob Y natanko dopolnjujeta, ko en dopolnjujoči se skutoid 5-6 obrnemo (glej sliko 10). Sicer so deli ravnin osnovni ploskvi, skutelum in pravokotnik nasproti Y . Vse ostale ploskve so ukrivljene.



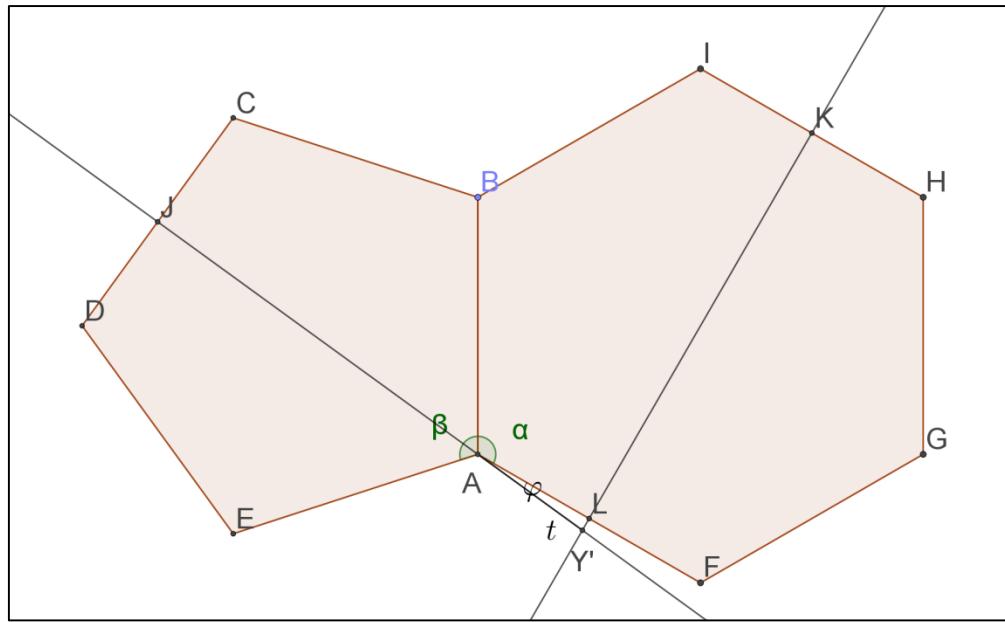
Slika 10: Par dopolnjujočih se skutoidov 5-6

Velikost stranice osnovnih ploskev označimo z a , višino skutoida pa s h . Izračunajmo krak skuteluma 5-6. Krak skuteluma 5-6 označimo z x . Ko projiciramo vrh Y na ravnino osnovne ploskve, dobimo točko Y' (slika 11). Daljico $[AY']$ označimo s t : $[AY'] = t$. V spodnjem skutelumu velja zveza:

$$x^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + t^2.$$

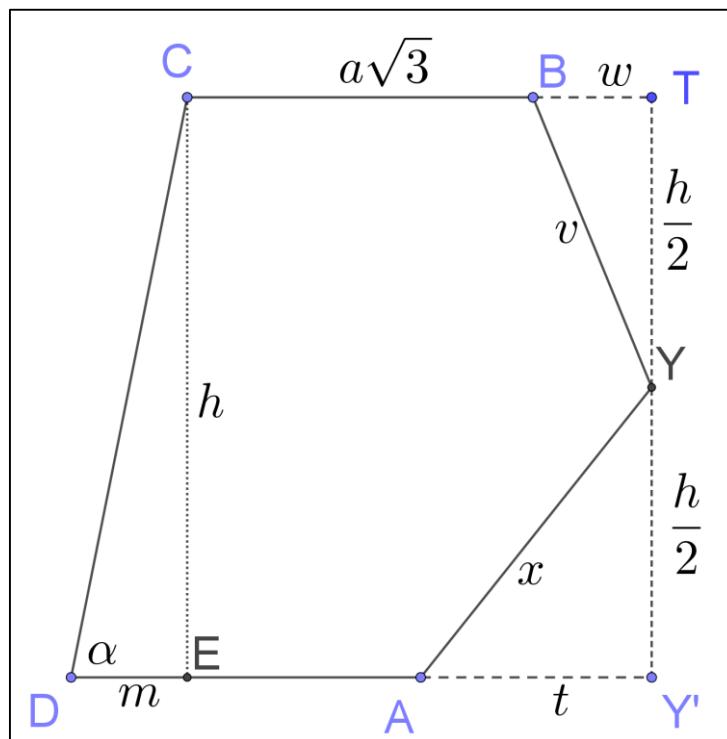
Ker je kot $\varphi = \angle LAY' = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} = 6^\circ$, je potem $t = \frac{a}{2 \cos 6^\circ}$ in odtod je

$$x = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h^2 \cdot \cos 12^\circ + 2a^2 + h^2}}{4 \cdot \cos 6^\circ}$$



Slika 11: K izračunu dolžine kraka skuteluma 5-6

Izračunajmo še kot, ki ga ploskev nasproti Y (imenujmo jo zadnja ploskev) oklepa z ravnino osnovne ploskve. Naredimo presek skutoida 5-6 z ravnino skozi premico JY' in pravokotno na ravnino osnovne ploskve (slika 12).



Slika 12: K izračunu naklonskega kota α

S pomočjo slik 11 in 12 izpeljemo in povzamemo naslednje zveze:

$$t = \frac{a}{2 \cdot \cos 6^0}, \quad w = |LY'| = \frac{a}{2} \cdot \tan 6^0.$$

Dolžina doljice AD na sliki 12 je enaka dolžini doljice AJ s slike 11, zato je:

$$|AD| = a \cdot \cos 54^0 + a \cdot \cos 18^0.$$

$$|DY'| = a \cdot \cos 54^0 + a \cdot \cos 18^0 + \frac{a}{2 \cdot \cos 6^0}$$

$$|CT| = a\sqrt{3} + \frac{a}{2} \cdot \tan 6^0.$$

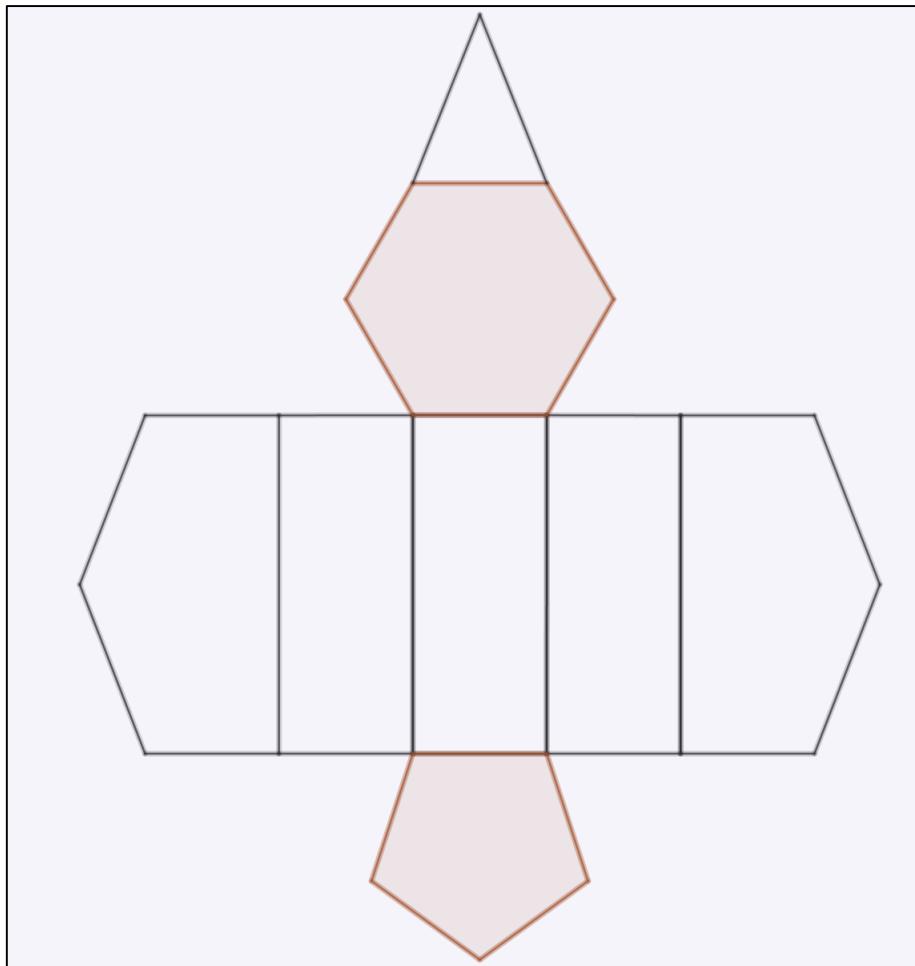
$$m = |DY'| - |CT|$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{m} = \frac{2h(\sin 6^0 + 1)}{a(\cos 6^0 + (\sqrt{2\sqrt{5} + 5} - 2\sqrt{3})(\sin 6^0 + 1))}$$

Pri modelu dopolnjujočega se skutoida 5-6 smo imeli dolžino stranice $a = 3.5$ cm in višino $h = 8.8$ cm. V tem primeru je naklonski kot enak $\alpha = 84.16388769^0$.

3.1.3 Mreža dopolnjujočega se skutoida 5-6

Na sliki 13 je narisana približna mreža dopolnjujočega se skutoida 5-6. Približna je zato, ker so nekatere ploskve ukrivljene in jih ne moremo zravnati v ravnino.



Slika 13: Približna mreža dopolnjujočega se skutoida 5-6

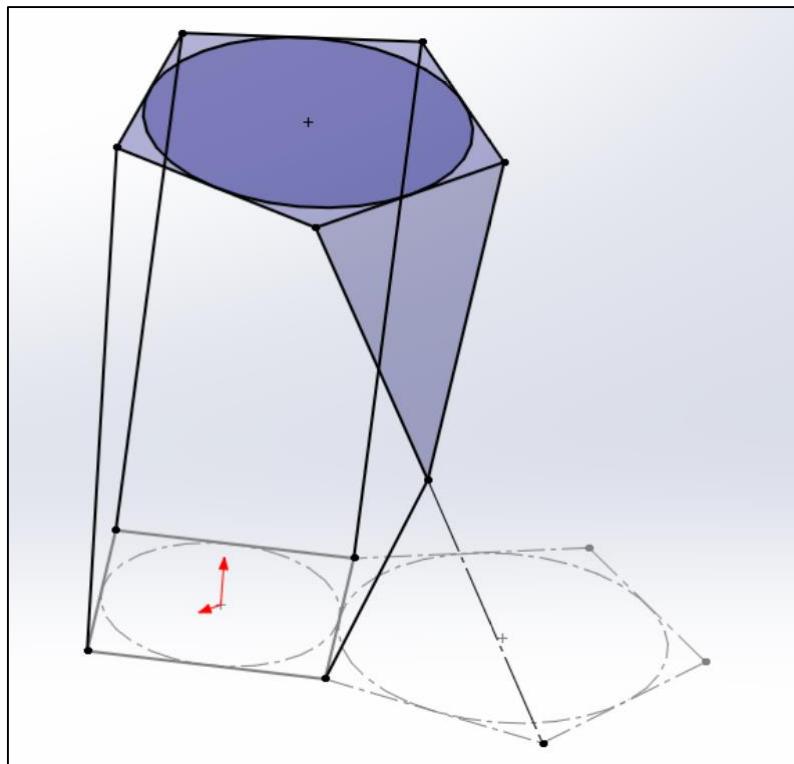
3.1.4 Verige dopolnjujočih se skutoidov 5-6

Dopolnjujoči se skutoidi 5-6 se v paru dopolnjujejo na tri načine. Prvi in drugi način sta s ploskvami ob Y, tretji s ploskvami nasproti Y. Seveda morata biti dopolnjujoča se skutoida 5-6 zasukana. En način je prikazan na sliki 10. Z dopolnjujočimi se skutoidi 5-6 lahko tvorimo različne verige (glej fotografiji 2 in 3 v prilogi I). »Krožnicek« ne moremo sestaviti, saj je kot zasuka enak 48^0 , ki ni delitelj 360^0 (glej fotografijo 2 v Prilogi I).

3.2 Dopolnjujoči se skutoid 4-5

3.2.1 Definicija

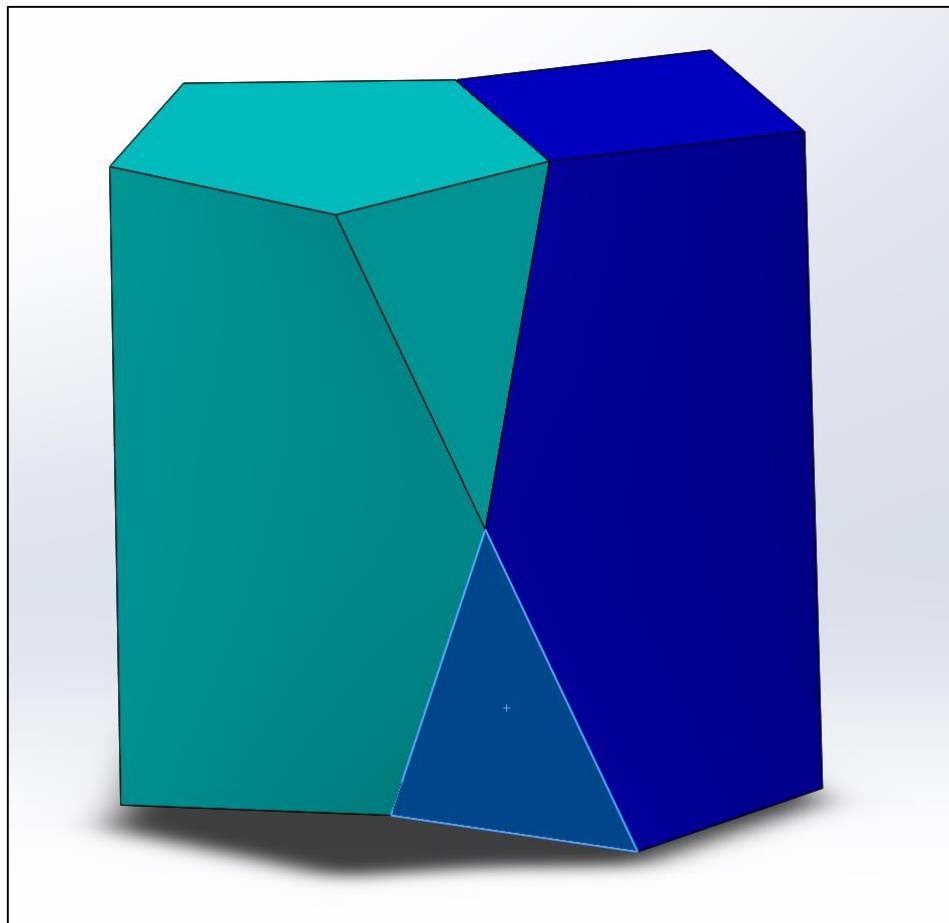
Definicija dopolnjujočega se skutoida 4-5 je analogna definiciji dopolnjujočega se skutoida 5-6, le da sta osnovni ploskvi kvadrat in pravilni petkotnik z enakima osnovnicama. Na sliki 14 je prikazan ključni trenutek konstrukcije, s katerim dosežemo popolno simetrijo ploskev ob Y.



Slika 14: Bistvena faza konstruiranja dopolnjujočega se skutoida 4-5

3.2.2 Opis geometrijskih lastnosti

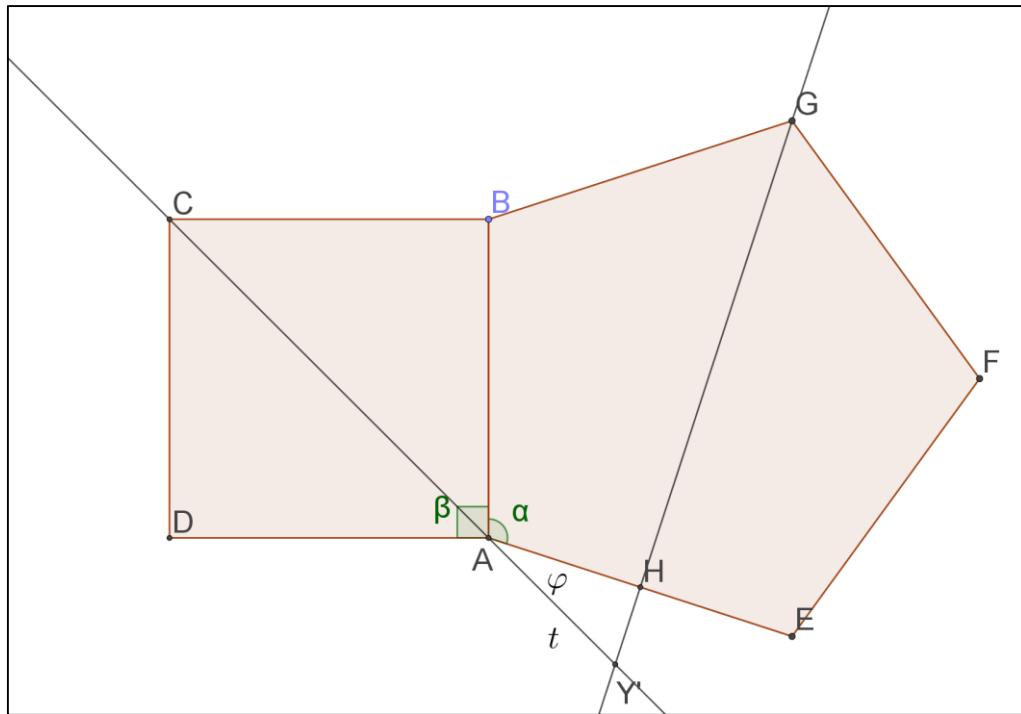
Zaradi same konstrukcije se dopolnjujoča skutoida 4-5 dopolnjujeta s ploskvama ob Y (slika 15). Sicer so deli ravnin osnovni ploskvi in skutelum. Vse ostale ploskve so ukrivljene.



Slika 15: Par dopolnjujočih se skutoidov 4-5

Velikost stranice kvadrata in stranice pravilnega petkotnika označimo z a , krak skuteluma 4-5 pa z x . Naj bo Y' pravokotna projekcija središča Y na ravnino osnovne ploskve (slika 15). Ko projiciramo vrh Y na ravnino osnovne ploskve, dobimo točko Y' (slika 16). Daljico $[AY']$ označimo s t : $[AY'] = t$. V spodnjem skutelumu velja zveza:

$$x^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + t^2.$$



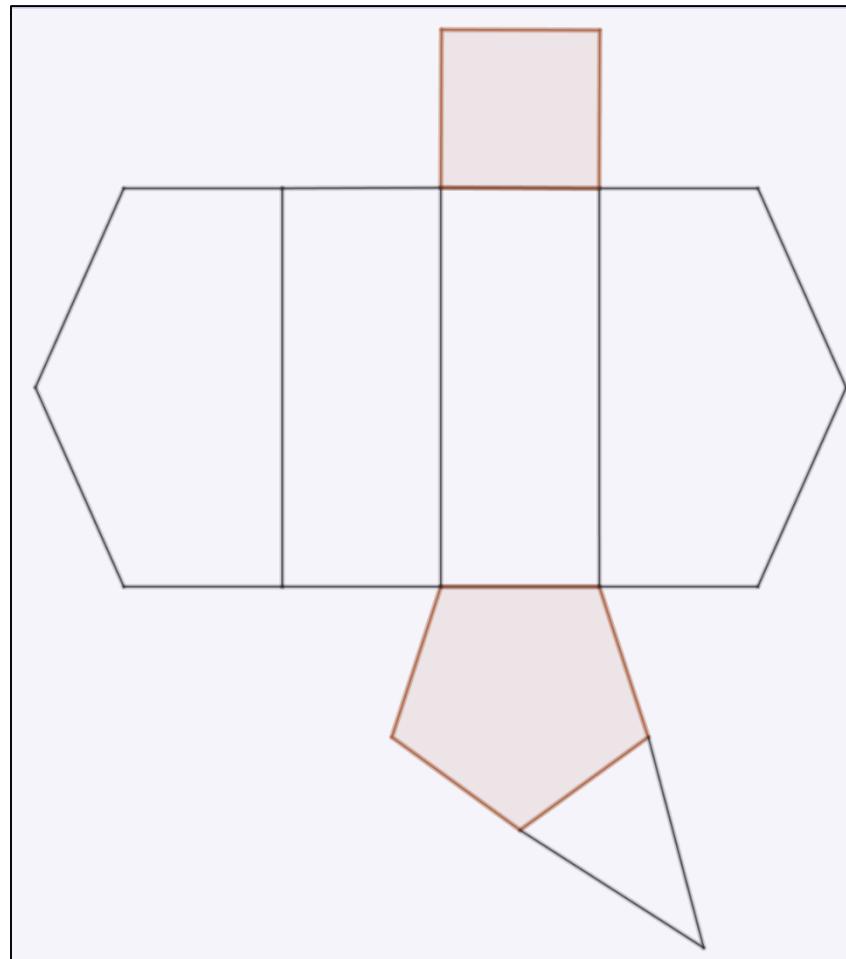
Slika 16: K izračunu dolžine kraka skuteluma 4-5

Ker je kot $\varphi = \angle HAY' = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} = 27^\circ$, je potem $t = \frac{a}{2 \cos 27^\circ}$ in odtod je

$$x = \frac{\sqrt{h^2 - 2a^2 \left(\sqrt{(50 - 22\sqrt{5})} + 2\sqrt{5} - 6 \right)}}{2}$$

3.2.3 Mreža dopolnjujočega se skutoida 4-5

Na sliki 17 je prikazana približna mreža dopolnjujočega se skutoida 4-5.



Slika 17: Približna mreža dopolnjujočega se skutoida 4-5

3.2.4 Verige dopolnjujočih se skutoidov 4-5

Dopolnjujoči se skutoid 4-5 nima ploskve nasproti Y. Zato lahko tvorimo le verigo štirih dopolnjujočih se skutoidov 4-5. Takšna veriga je na fotografiji 4 v prilogi I.

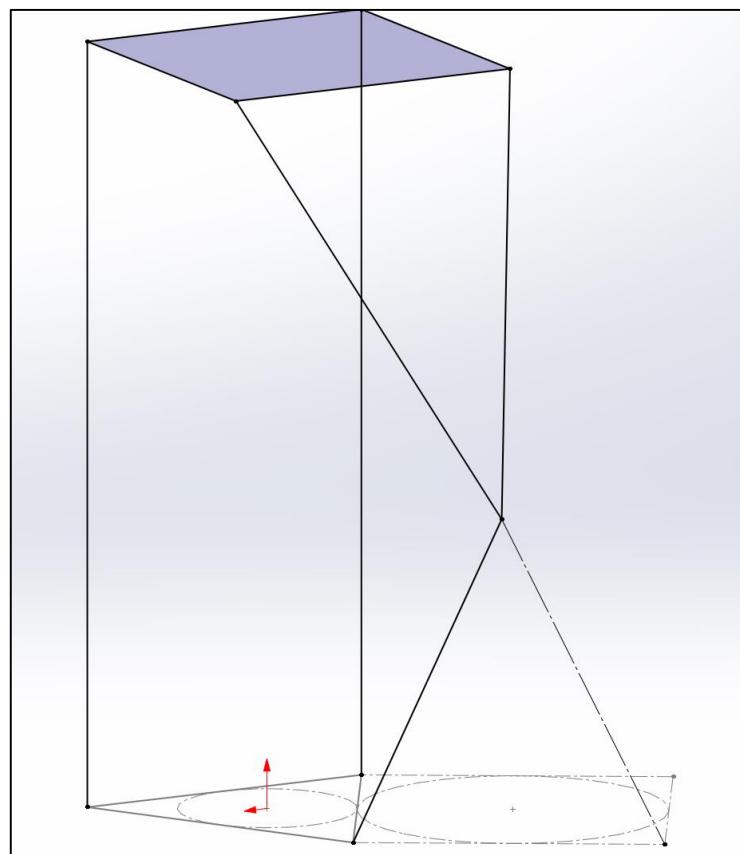
3.3 Dopolnjujoči se skutoid 3-4

3.3.1 Definicija

Definicija dopolnjujočega se skutoida 3-4 je analogna definiciji dopolnjujočega se skutoida 5-6, le da sta osnovni ploskvi enakostranični trikotnik in kvadrat z enakima osnovnicama. Na sliki

Dopolnjujoči se skutoidi

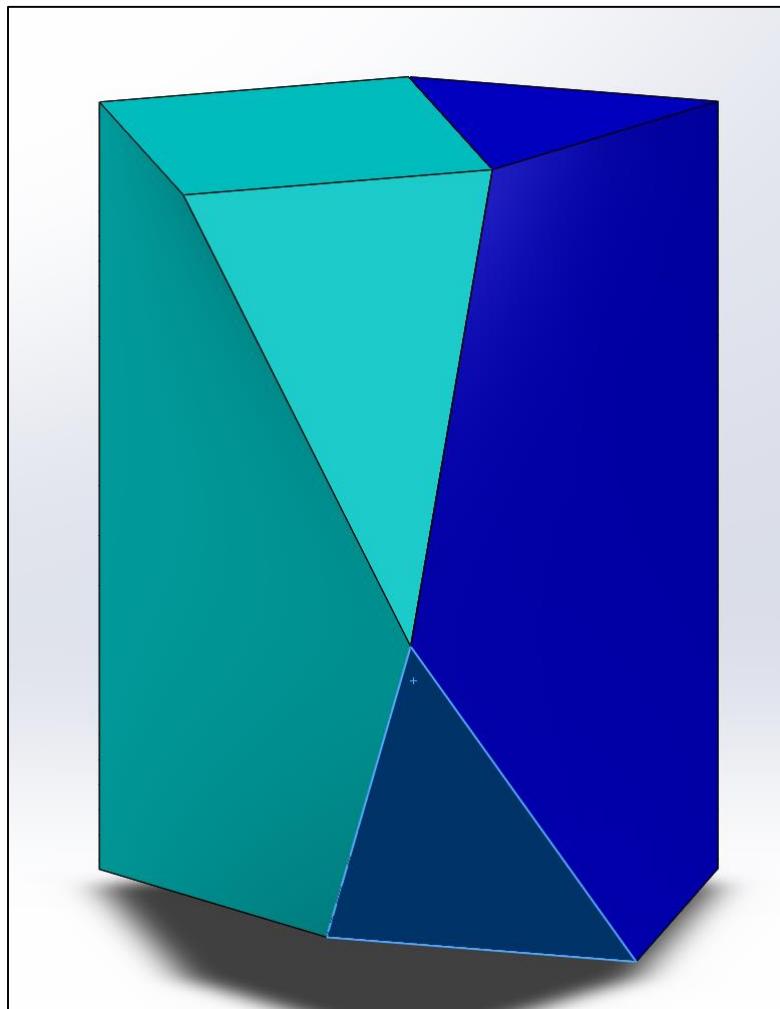
18 je prikazan ključni trenutek konstrukcije, s katerim dosežemo, da sta ploskvi ob Y skladni, kar omogoča dopolnjevanje ploskev ob Y.



Slika 18: Prikaz ključnega trenutka konstrukcije dopolnjujočega se skutoida 3-4

3.3.2 Opis geometrijskih lastnosti

Zaradi same konstrukcije se dopolnjujoča skutoida 3-4 dopolnjujeta s ploskvama ob Y (slika 19). Sicer so deli ravni osnovni ploskvi, skutelum in pravokotnik nasproti Y. Ostali dve ploskvi ob Y sta ukrivljeni.

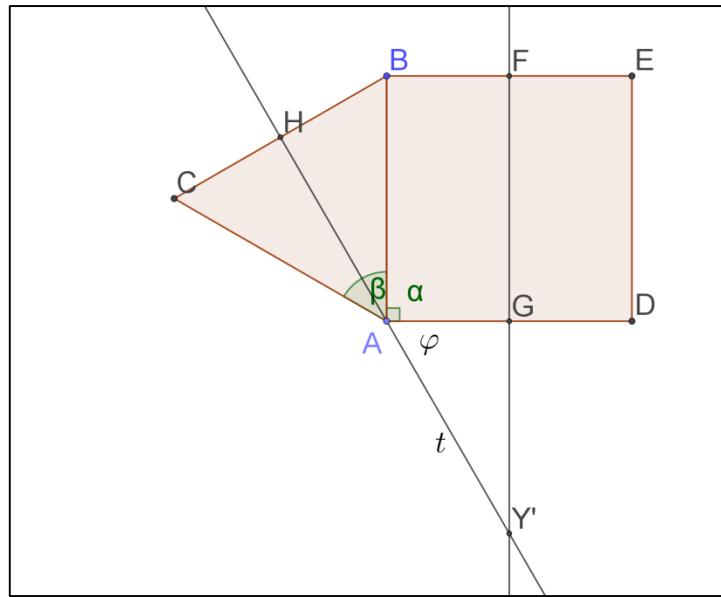


Slika 19: Par dopolnjujočih se skutoidov 3-4

Velikost stranice enakostraničnega trikotnika in kvadrata označimo z a . Izračunajmo krak skuteluma 3-4. Krak skuteluma označimo z x . Naj bo Y' pravokotna projekcija središča Y na ravnino osnovne ploskve. Ko projiciramo vrh Y na ravnino osnovne ploskve, dobimo točko Y' (slika 20). Daljico $[AY']$ označimo s t : $[AY'] = t$. V spodnjem skutelumu velja zveza:

$$x^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + t^2.$$

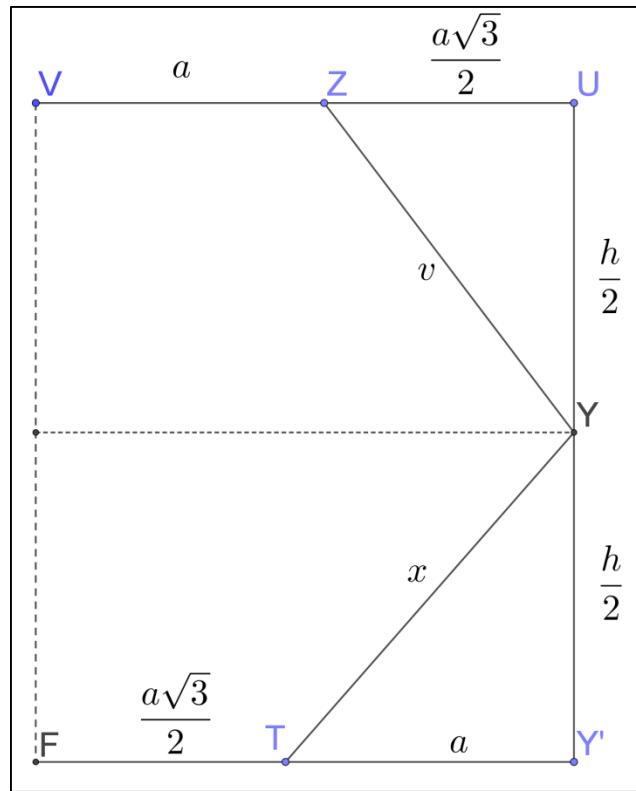
Dopolnjujoči se skutoidi



Slika 20: K izračunu dolžine kraka skuteluma 3-4

Ker je kot $\varphi = \angle GAY' = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} = 60^\circ$, je potem $t = a$ in odtod je

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{(4a^2 + h^2)}$$



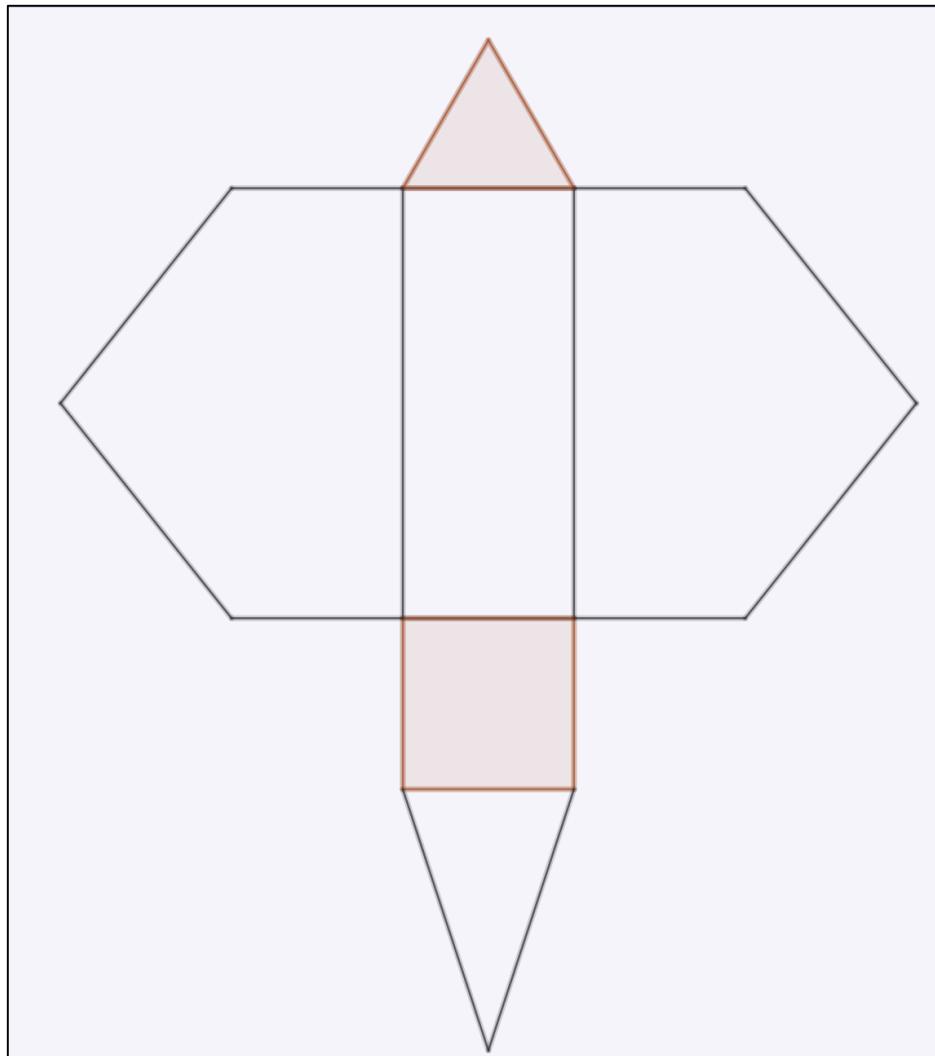
Slika 21: K dokazu pravokotnosti ploskve nasproti Y v dopolnjujočem se skutoidu 3-4

Dopolnjujoči se skutoidi

Na sliki 21 je prikazan presek vzdolž skutoida 3-4 (s simetrijsko ravnino). Daljici FY' in $Y'U$ sta pravokotni, saj je Y' pravokotna projekcija točke Y na ravnino osnovne ploskve. Daljici $|FY'|$ in $|VU|$ sta enako dolgi, zato je štirikotnik $FY'UV$ pravokotnik. Tako smo dokazali, da je stranska ploskev, ki leži nasproti Y skutoida 3-4, pravokotna na ravnino osnovne ploskve.

3.3.3 Mreža dopolnjujočega se skutoida 3-4

Podobno kot v ostalih primerih smo tudi za dopolnjujoči se skutoid 3-4 narisali približno mrežo (glej sliko 22).



Slika 22: Približna mreža dopolnjujočega se skutoida 3-4

3.3.4 Verige skutoidov 3-4

Dopolnjujoči se skutoidi 3-4 se lahko povezujejo z dopolnjevanjem na štiri načine: na obeh ploskvah ob Y in s ploskvijo nasproti Y. Ker je zadnja ploskev pravokotna na ravnino osnovne ploskve, lahko drugi skutoid 3-4 obrnemo ali pa ne (to velja le za zadnjo ploskev). Nekaj primerov je v prilogi I (fotografiji 5 in 6). Dopolnjujoče se skutoide 3-4 pa lahko razporedimo v venec (krožnico), saj je pri vsakem naslednjem zasuk za 30^0 . Potrebujemo jih 12 in na zunanji strani dobimo pravilni dvanajstkotnik.

3.4 Izračun dolžine kraka skuteluma dopolnjujočega se skutoida v splošnem

Naj bo n število kotov večjega pravilnega n -kotnika, α njegov notranji kot in β notranji kot manjšega, torej $(n-1)$ -kotnika, ki sestavlja osnovni ploski. Stranice so pri obeh enake z dolžino a . Naj bo Y' pravokotna projekcija središča Y na ravnino osnovne ploskve in A stičišče obeh osnovnih ploskev. S t označimo dolžino daljice $Y'A$. Kot med daljico AY' in stranico večjega n -kotnika označimo s φ , stranico skuteluma pa z x . Veljata enakosti:

$$x^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + t^2 \quad \text{ter} \quad t = \frac{a}{2 \cdot \cos \varphi}.$$

Kot φ izračunamo iz zvez (primerjaj slike 11, 16 in 20):

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}, \quad \beta = \frac{(n-3) \cdot 180}{n-1}, \quad \varphi = 180^0 - \alpha - \frac{\beta}{2}$$

$$\varphi(n) = \frac{(n^2 - 7n + 4)}{(1-n)n} \cdot 90^0$$

Pri dopolnjujočem se skutoidu 5-6 dobimo $\varphi(6) = 6^0$, pri dopolnjujočem se skutoidu 4-5 dobimo $\varphi(5) = 27^0$ in pri dopolnjujočem se skutoidu 3-4 dobimo $\varphi(4) = 60^0$.

Dopolnjujoči se skutoidi

Ugotovitev: Lega projekcije vrha Y na ravnino osnovne ploskve (to točko smo označili z Y') je neodvisna od višine dopolnjujočega se skutoida. Njen položaj določajo vrsta skutoida in dolžina stranic osnovnih ploskev.

Praktično to pomeni, da je »izboklina« pri Y enaka pri vseh dopolnjujočih se skutoidih iste vrste z enakimi stranicami osnovnih ploskev ne glede na njihovo višino.

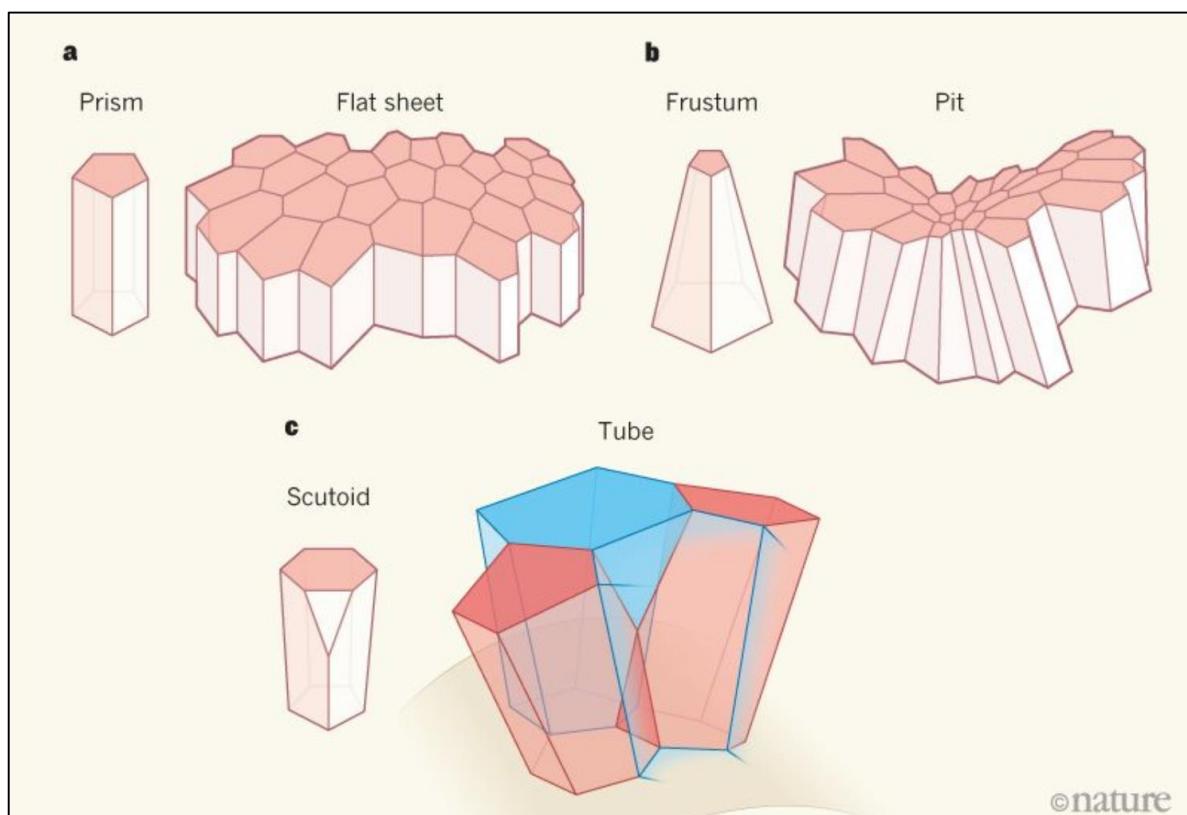
4 POVEZOVANJE RAZLIČNIH SKUTOIDOV

Ugotovili smo, da so pri obravnavanih dopolnjujočih se skutoidih kraki skutelumov različni, prav tako imajo zadnje ploskve (kjer obstajajo) različne naklonske kote z ravnino osnovnih ploskev. Ostale ploskve so različno ukrivljene (sklepamo iz modelov). Povezovanje (dopolnjevanje) različnih skutoidov v plasti med vzporednima ravninama torej ni možno.

5 MOŽNA PODROČJA UPORABE SKUTOIDOV

5.1 Modeliranje celic krovnih tkiv.

Raziskovalci z Univerze v Sevilli (SPA) in z Univerze Lehigh (ZDA) so razvili dopolnjujoči se skutoid 5-6 zaradi modeliranja združevanja celic krovnih tkiv. Predvidevamo, da sami uporabljajo različne skutoide.



Slika 23: Zapolnjevanje prostora s prizmami, prisekanimi piramidami in dopolnjujočimi se skutoidi 5-6
(Vir: <https://www.nature.com/articles/d41586-018-06162-1>)

5.2 Popolno zapolnjevanje prostora

Z obravnavanimi skutoidi ne moremo popolnoma zapolniti prostora med dvema ravninama. Na sliki 23 je nakazano popolno modeliranje krovnega tkiva med dvema ukrivljenima ploskvama z dopolnjujočimi se skutoidi 5-6 (Blanchard, 2018). Zanimivo bi bilo preizkusiti popolno zapolnjevanje prostora med dvema ukrivljenima ploskvama z istovrstnimi ali celo različnimi dopolnjujočimi se skutoidi, recimo prostor med dvema sferama (med velikim in malim C60).

5.3 Skutoidi kot ustvarjalna igrača

Dopolnjujoči se skutoidi so zelo zanimiva in ustvarjalna igrača. Predlagamo nekaj iger za otroke. Sestavili smo komplet skutoidov, ki ga sestavlja šest skutoidov z enakimi dolžinami osnovnih ploskev in enakimi višinami:

- par dopolnjujočih se skutoidov 5-6,
- par dopolnjujočih se skutoidov 4-5,
- par dopolnjujočih se skutoidov 3-4.

Predlagamo naslednje aktivnosti:

1. Iz množice skutoidov izberi tiste, ki imajo za osnovno ploskev pravilni petkotnik.
2. Sestavi pare enakih skutoidov tako, da se popolnoma dopolnjujeta. Koliko je vseh možnosti, da se enaka skutoide dopolnjujeta?
3. Vzemi dva kompleta skutoidov. Sestavljam verige enakih skutoidov.
4. Vzemi dva kompleta. Sestavljam oboke z enakimi skutoidi. Pri katerih skutoidih lahko sklenemo obok (naredimo krožnico)?
5. Sestavljam različne skutoide tako, da se dopolnjujejo. Ali je to sploh možno?
6. Vzemi en komplet. Iz vseh šestih skutoidov zgradi stolp tako, da se skutoida stikata z enako osnovno ploskvijo (rešitev je na fotografiji 9 v prilogi II)
7. Gradi stavbe (nekaj predlogov je v prilogah).

5.4 Skutoidi v umetnosti in oblikovanju

Dopolnjujoče se skutoide bi lahko uporabili pri oblikovanju predmetov (lončki za svinčnike, in sicer posamezni ali v paru, lončki za rože ...) in v umetnosti ter oblikovanju prostora (arhitekturi). Nekaj predlogov je v prilogi II.

6 ZAKLJUČEK

V raziskovalni nalogi smo obravnavali geometrijska telesa (ali 3D oblike) skutoide. Večina lastnosti, ki smo jih uspeli odkriti, se nanaša na njihove robe in stranice. Kjer robovi ploskve ne ležijo v isti ravnini, je ploskev ukrivljena. Ukrivljenost je lahko konveksna ali konkavna. Tega nismo raziskovali. Program SOLIDWORKS je obliko ukrivljenih ploskev sam določil. S programom SOLIDWORKS smo izmerili ujemanje (dopolnjevanje) parov dopolnjujočih se skutoidov in dobili 100 % ujemanje. V naravi (pri modeliranju celic krovnih tkiv) pa sama ukrivljenost ni bistvena, saj so celice iz membran in zelo prilagodljive.

Zanimivo bi bilo izračunati površine in prostornine skutoidov ali pa celo izpeljati splošne formule.

Za nadaljevanje raziskave skutoidov predlagamo izziv: Ali je mogoče z dopolnjujočimi se skutoidi popolnoma napolniti prostor med dvema sferama in sicer samo z istovrstnimi ter posebej z različnimi.

7 VIRI IN LITERATURA

[1] Blanchard, G. »A 3D cell shape that enables tube formation.« V: *Nature*, 2018. Dostopno na naslovu: <https://www.nature.com/articles/d41586-018-06162-1>. Obiskano: 24. 3. 2018.

[2] Gomez-Galvez, Pedro. »Scutoids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia.« V: *Nature*, 2018. Dostopno na naslovu: <https://www.nature.com/articles/s41467-018-05376-1>. Obiskano: 15. 10. 2018.

8 KAZALO SLIK IN PRILOG

Slika 1: Epitelsko zlaganje celic (Vir: Gomez, 2018)	5
Slika 2: Modeliranje krovnega tkiva s prizmami in prisekanimi piramidami (Vir: Gomez, 2018)	6
Slika 3: Novo telo – skutoid (Vir: Gomez, 2018).....	6
Slika 4: Skica Voronijevih diagramov na spodnji in zgornji plasti krovnega tkiva (Vir: Gomez, 2018)	7
Slika 5: Modeliranje celic v krovnem tkivu s skutoidi (Vir: Gomez, 2018).....	7
Slika 6: Primer hroščka iz rodu Cetoniidae, kjer je viden trikotni ščitek – skutelum (Vir: Gomez, 2018)	7
Slika 7: Navadni skutoid 5-6.....	9
Slika 8: Približna mreža navadnega skutoida 5-6.....	10
Slika 9: Bistvena faza konstruiranja dopolnjujočega se skutoida 5-6.....	11
Slika 10: Par dopolnjujočih se skutoidov 5-6	12
Slika 11: K izračunu dolžine kraka skuteluma 5-6.....	13
Slika 12: K izračunu naklonskega kota α	13
Slika 13: Približna mreža dopolnjujočega se skutoida 5-6	15
Slika 14: Bistvena faza konstruiranja dopolnjujočega se skutoida 4-5	16
Slika 15: Par dopolnjujočih se skutoidov 4-5	17
Slika 16: K izračunu dolžine kraka skuteluma 4-5	18
Slika 17: Približna mreža dopolnjujočega se skutoida 4-5	19
Slika 18: Prikaz ključnega trenutka konstrukcije dopolnjujočega se skutoida 3-4	20
Slika 19: Par dopolnjujočih se skutoidov 3-4	21
Slika 20: K izračunu dolžine kraka skuteluma 3-4.....	22
Slika 21: K dokazu pravokotnosti ploskve nasproti Y v dopolnjujočem se skutoidu 3-4	22
Slika 22: Približna mreža dopolnjujočega se skutoida 3-4	23
Slika 23: Zapolnjevanje prostora s prizmami, prisekanimi piramidami in dopolnjujočimi se skutoidi 5-6 (Vir: https://www.nature.com/articles/d41586-018-06162-1)	26

PRILOGA I: SESTAVLJANJE SKUTOIDOV ISTE VRSTE 30

PRILOGA II: SKUTOIDI V UMETNOSTI IN OBLIKOVANJU 34

PRILOGE

PRILOGA I: SESTAVLJANJE SKUTOIDOV ISTE VRSTE

(Foto: Eva Brumat in Domen Vovk)



Fotografija 1: Navadni skutoid ima samo eno možnost povezovanja med seboj

Dopolnjujoči se skutoidi

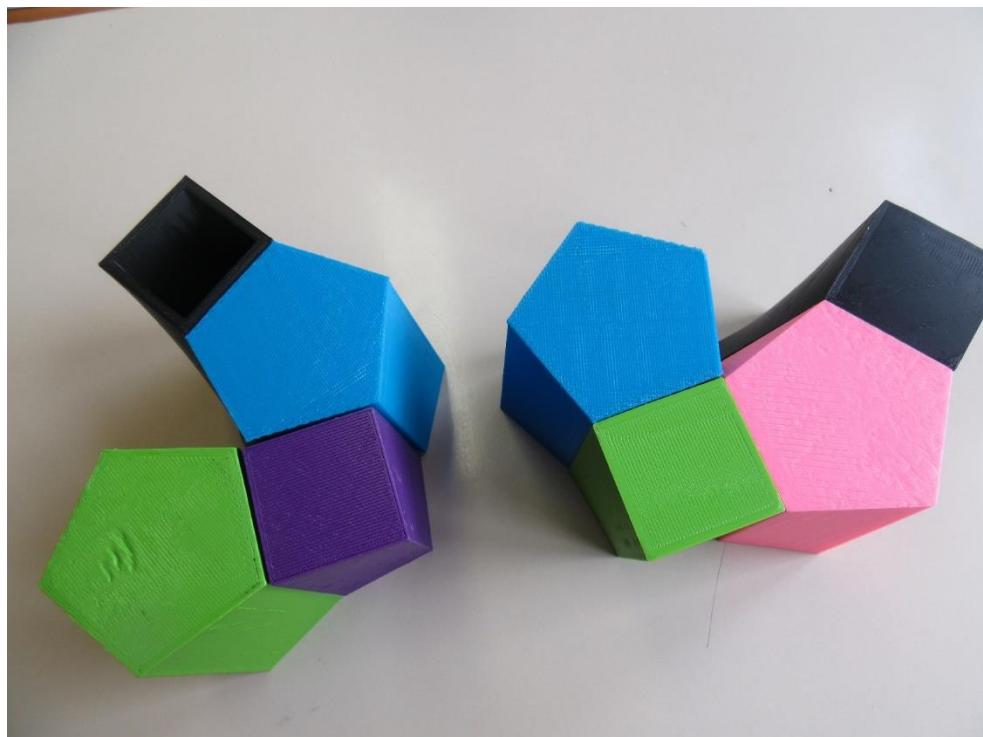


Fotografija 2: Z dopolnjujočimi se skutoidi 5-6 ne moremo skleniti kroga

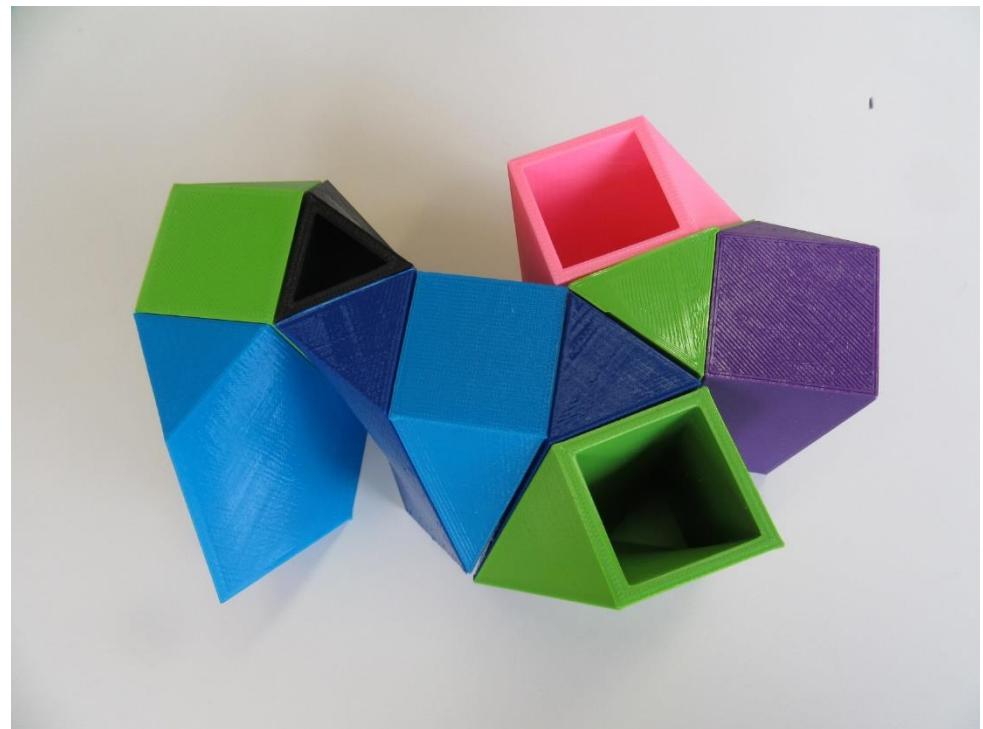


Fotografija 3: Možnosti za verige dopolnjujočih se skutoidov 5-6 je veliko, saj se lahko popolnoma prilegajo na tri načine

Dopolnjujoči se skutoidi

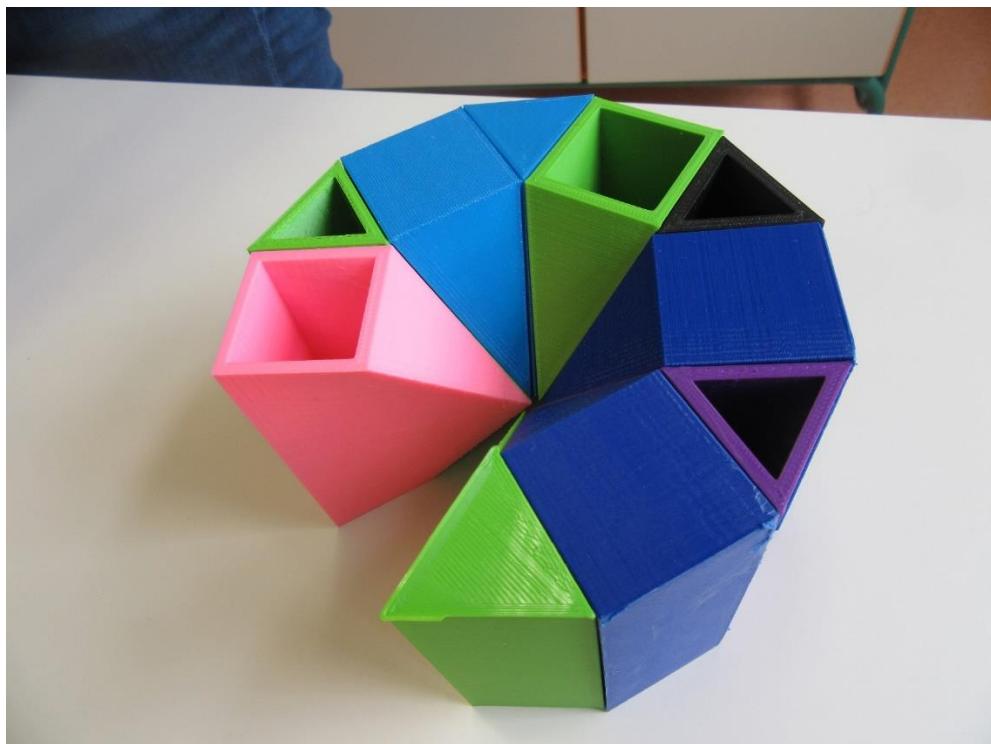


Fotografija 4: Največ štirje dopolnjujoči se skutoidi 4-5 se lahko popolnoma povežejo med seboj



Fotografija 5: Z dopolnjujočimi se skutoidi 3-4 lahko sestavljamo različne verige

Dopolnjujoči se skutoidi



Fotografija 6: Z dopolnjujočimi se skutoidi 3-4 lahko sestavimo krožnico

(na fotografiji je prostora še za natanko dva)

Dopolnjujoči se skutoidi

PRILOGA II: SKUTOIDI V UMETNOSTI IN OBLIKOVANJU

(Foto: Eva Brumat in Domen Vovk)



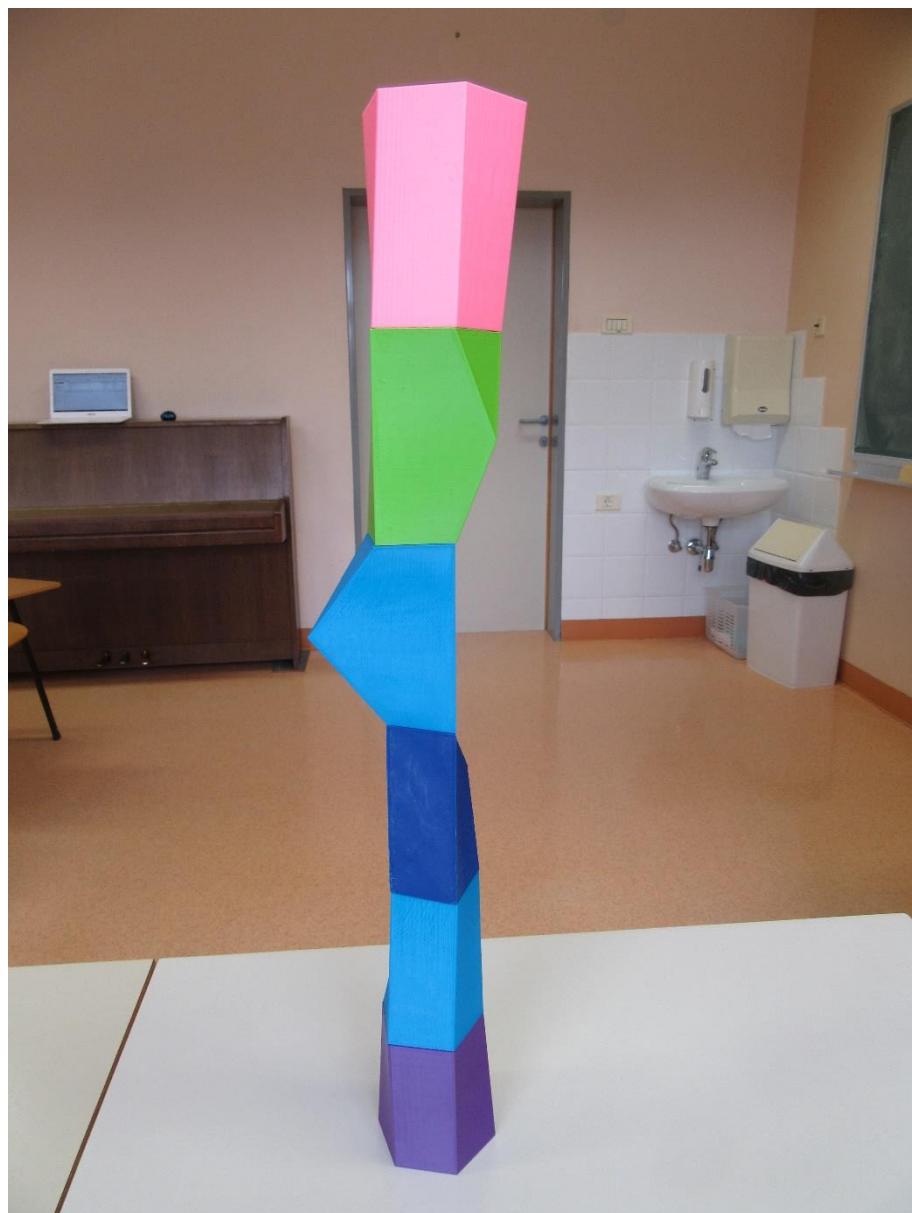
Fotografija 7: Dvojni stolp iz dopolnjujočih se skutoidov 5-6

Dopolnjujoči se skutoidi



Fotografija 8: Stolpa iz dopolnjujočih se skutoidov 5-6, ki se dopolnjujeta

Dopolnjujoči se skutoidi



Fotografija 9: Stolp, sestavljen iz parov dopolnjujočih se skutoidov 5-6, 4-5 in 3-4

Dopolnjujoči se skutoidi



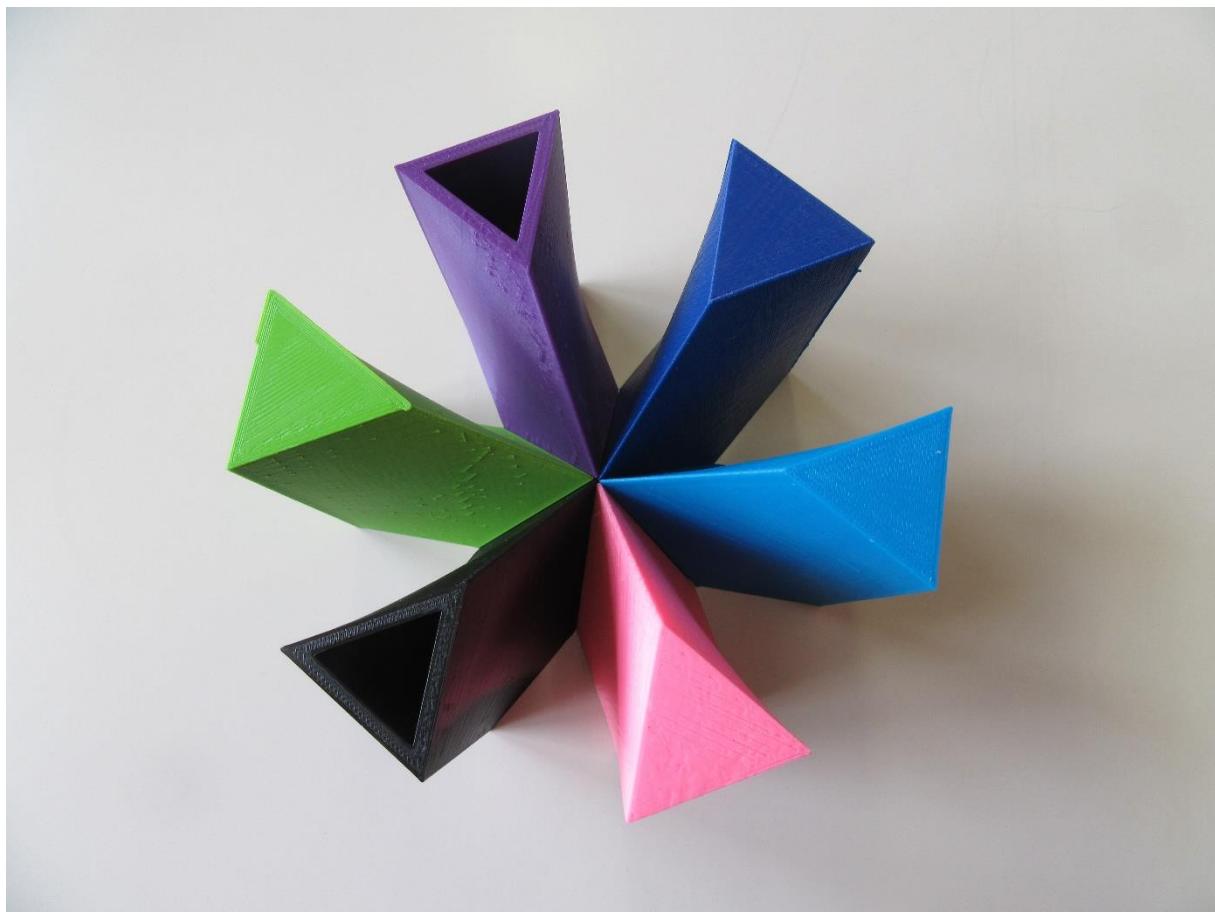
Fotografija 10: Oblikovanje figur z dopolnjujočimi se skutoidi

Dopoljujoči se skutoidi



Fotografija 11: »Cvet k« iz dopoljujočih se skutoidov 3-4

Dopoljujući se skutoidi



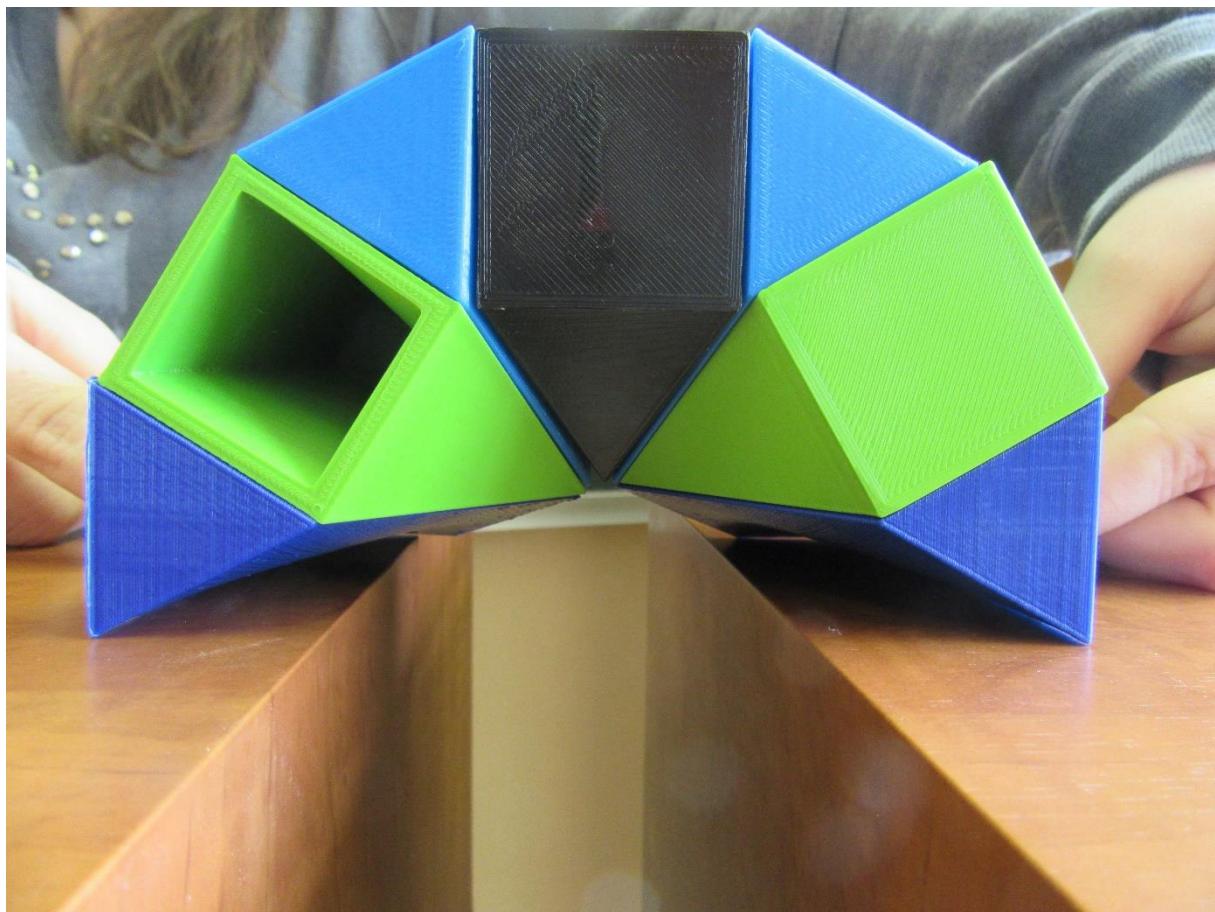
Fotografija 12: »Cvet II« iz dopoljujučih se skutoidov 3-4

Dopolnjujoči se skutoidi



Fotografija 13: Dopolnjujoči se skutoidi 3-4 plešejo »kolo«

Dopolnjujoči se skutoidi



Fotografija 14: Most iz dopolnjujočih se skutoidov 3-4