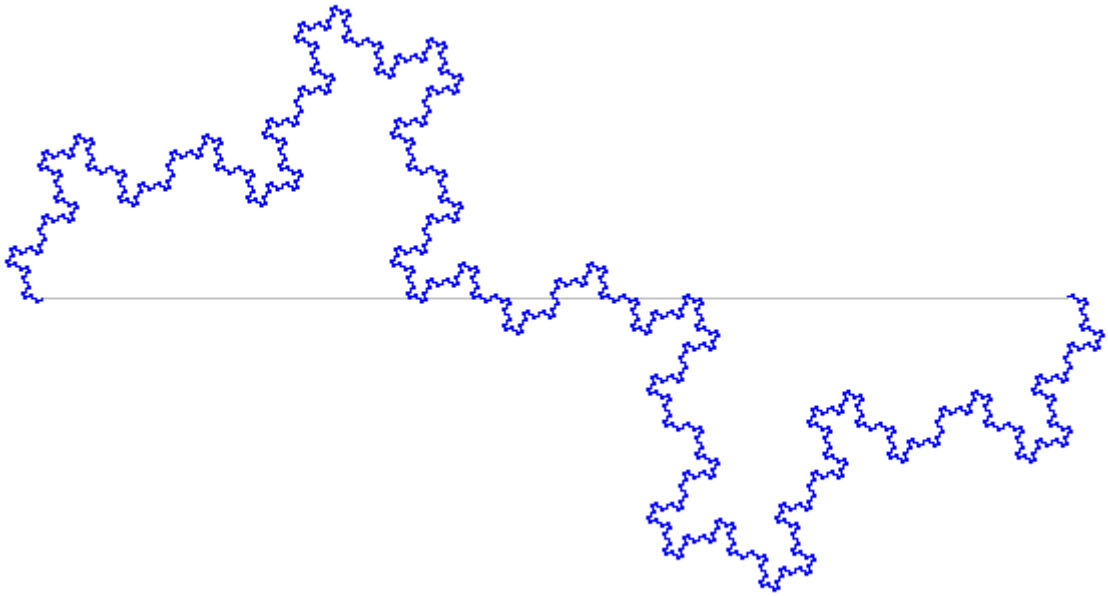
*RAZISKOVALNA NALOGA*

# FRAKTALNA KRIVULJA »CIK-CAK«



**Avtor:** **Matjaž Vovk**

**Področje:** ***matematika in logika***

**Mentor:** mag. Alojz Grahor, prof. mat.

**April, 2014**

**Škofijska gimnazija Vipava**

**ZAHVALA**

Zahvaljujem se

- svojemu mentorju mag. Alojzu Grahorju za spodbude pri izdelavi raziskovalne naloge,
- dr. Dušanu Pagonu za nasvete glede literature in pomoč pri oblikovanju nekaterih ciljev naloge in
- prof. Sonji Matelič za pregled prevoda povzetka v angleščino.

**POVZETEK**

V nalogi obravnavamo nekatere lastnosti fraktalnih krivulj. Fraktalna krivulja je krivulja, ki se ne prekriva in ki je sebipodobna, kar pomeni, da jo lahko razdelimo na $n$ manjših enakih delov, od katerih je vsak pomanjšana kopija začetne krivulje. Definiramo običajno dimenzijo sebipodobnosti (fraktalno dimenzijo) kot razmerje med logaritmom števila pomanjšanih delov in logaritmom faktorja pomanjšave. V prvem delu raziskovalne naloge dokažemo, da obstaja neskončno fraktalnih krivulj, katerih fraktalna dimenzija je enaka racionalnemu številu. V drugem delu raziskujemo tako imenovano družino »cik-cak« fraktalnih krivulj, ki se razlikujejo glede na začetni kot zasuka. Izračunamo kot, pri katerem pride do dotikanja krivulje s krivuljo samo za nekaj začetnih nivojev krivulje. Za limitno krivuljo ocenimo velikost dotikalnega kota. Odprto ostaja vprašanje izračuna dotikalnega kota limitne krivulje »cik-cak«.

**Ključne besede:** *fraktal, sebipodobnost, fraktalna dimenzija, fraktalna krivulja, dotikalni kot*

**THE ABSTRACT**

In the research paper some properties of fractal curves are discussed. A fractal curve is a curve which does not overlap itself and is self-similar, which means we can divide it into $n$ equal smaller parts among which each is a diminished copy of the initial curve. The normal similarity dimension (the fractal dimension) is defined as a ratio between the logharithm of the number of copies and the logarithm of the scaling factor. The first part of this paper proves that the number of the fractal curves which have the fractal dimension equal to a rational number is infinite. The second part researches the so-called »zigzag« family of the fractal curves which vary depending on the initial angle. The angle at which the curve overlaps itself is calculated, but only for some initial levels of the curve. The calculation of the overlapping angle of the limit »zigzag« fractal curve remains an open question.

**Keywords:** *fractal, self-similarity, fractal dimension, fractal curve, overlapping angle*

**Kazalo**

# Vsebina

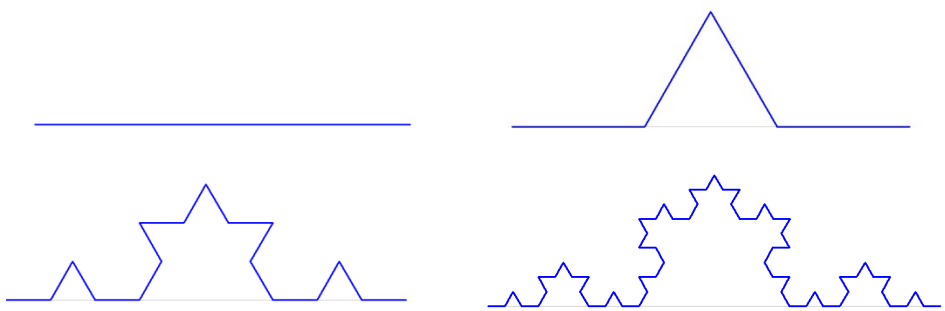
**ZAHVALA.....1**
**POVZETEK.....2**
**THE ABSTRACT.....2**
**Kazalo.....3**
**1.UVOD.....4**
1.1.Splošno o fraktalih.....4
1.2.Sebipodobnost.....5
1.3.O dimenzijah.....6
1.4.Definicija fraktala.....8
1.5.Fraktalne krivulje.....8
1.6.Fraktalna krivulja »cik-cak«.....9
1.6.1.Osnovni primer.....9
1.6.2.Posplošitev.....11
**2.CILJ NALOGE IN METODE DELA.....13**
2.1.Cilji naloge in hipoteze.....13
Prvi cilj.....13
Drugi cilj.....13
2.2. Metode dela.....14
**3.FRAKTALNE KRIVULJE S FRAKTALNO DIMENZIJO, ENAKO RACIONALNEMU ŠTEVILU.....15**
3.1. Prvi dokaz.....15
3.2. Drugi dokaz.....17
**4.DOTIKALNI KOTI FRAKTALNE KRIVULJE »CIK-CAK«.....19**
4.1.Dotikalni kot krivulje »cik-cak« drugega nivoja.....19
4.2.Dotikalni kot krivulje »cik-cak« tretjega nivoja.....21
4.3.Dotikalni kot krivulje »cik-cak« četrtega nivoja.....24
4.4.Dotikalni kot krivulje »cik-cak« petega nivoja.....26
4.5.Dotikalni kot krivulje »cik-cak« šestega nivoja.....28
4.6.Dotikalni kot krivulje »cik-cak« sedmega nivoja.....31
4.7.Dotikalni kot limitne krivulje »cik-cak«.....34
**5.ZAKLJUČKI.....36**
**6.VIRI IN LITERATURA.....37**
**7.PRILOGE.....38**
Priloga 1: Fraktalna krivulja »cik-cak« na četrtem nivoju.....38

# 1. UVOD

## *1.1. Splošno o fraktalih*

V nalogi obravnavamo del področja, ki ga zajema teorija *fraktalov.* Kot je znano, je začetnik te teorije Benoît Mandelbrot (rojen 1924, delo je objavil leta 1975). Obravnavali bomo *fraktalne krivulje*, ki so primeri fraktalov. Zato najprej definirajmo pojem fraktala. Začnimo s primeri. V matematični literaturi so najbolj znani *Cantorjeva množica*, *Kochova krivulja* in *trikotnik Sierpinskega* (sliki 1 in 3).

Ker bomo v nadaljevanju obravnavali samo krivulje, si nekoliko podrobneje oglejmo Kochovo krivuljo. Kochova krivulja nastane, ko dano daljico, dolžine $a$ (v nadaljevanju kdaj pa kdaj bomo brez izgube splošnosti vzeli $a = 1$), razdelimo na tri enake dele. Srednji del odstranimo, nad njim pa narišemo enakokraki trikotnik brez osnovnice s stranico $\frac{a}{3}$ (dejansko gre za enakostranični trikotnik brez osnovnice). S tem smo povedali pravilo, kako nadaljevati na vsakem odseku nove krivulje. S pravilom (prvim nivojem) je krivulja določena, zato mu pravimo *generator* krivulje. Zaporedoma lahko narišemo več nivojev (slika 1). Končna Kochova krivulja je limitna krivulja.



*Slika 1: Začetni in prvi trije nivoji Kochove krivulje*

Fraktalne krivulje, ki smo jih obravnavali v nalogi, smo risali s programom Python. Program za izris Kochove krivulje je na sliki 2. Za ostale krivulje le prilagodimo podprogram *f*, s katerim opišemo generator krivulje. Seveda prilagodimo tudi vhodne podatke: dolžino začetne daljice, dolžino kraka, nivo in kot, kar je pač potrebno.

```
from turtle import *
from math import *
def f(krak, globina):
    #  Kochova krivulja
    if globina == 0:
      forward(krak)
    else:
      f(krak/3, globina-1)
      left(kot)
      f(krak/3, globina - 1)
      right(dvojnikot)
      f(krak/3, globina-1)
      left(kot)
      f(krak/3, globina-1)
```

```
stranica=3**6
nivo = 3
kot=60
dvojnikot=2*kot
hideturtle()
backward(stranica/2)
speed("fastest")
pencolor("gray")
forward(stranica)
backward(stranica)
pensize(3)
pencolor("blue")
f(stranica, nivo)
```

*Slika 2: Program v Pythonu za izris posameznega nivoja Kochove krivulje*

Tudi v naravi se pojavljajo oblike, ki jim pravimo fraktali, le da se njihovo členjenje konča v končno korakih. Primeri so: drevo, praprot, brokoli.

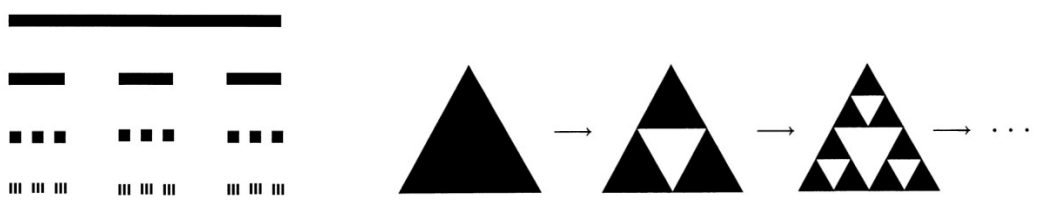
Pred obravnavo fraktalov moramo definirati, kdaj je neka množica fraktal. Matematiki so izluščili dve značilnosti, s katerimi natanko opišemo fraktal. To sta: *lastnost sebipodobnosti* in fraktalna dimenzija (ali tudi *dimenzija sebipodobnosti*). Potrebovali bomo tudi opis *topološke dimenzije*.

## *1.2. Sebipodobnost*

**Definicija 1: Sebipodobnost**

**Množica je sebipodobna, kadar je vsak njen del pomanjšana kopija celote. Sebipodobnost je lastnost, »da s povečanjem delov strukture dobimo strukturo, ki je identična originalu.« ([2], stran 2).**

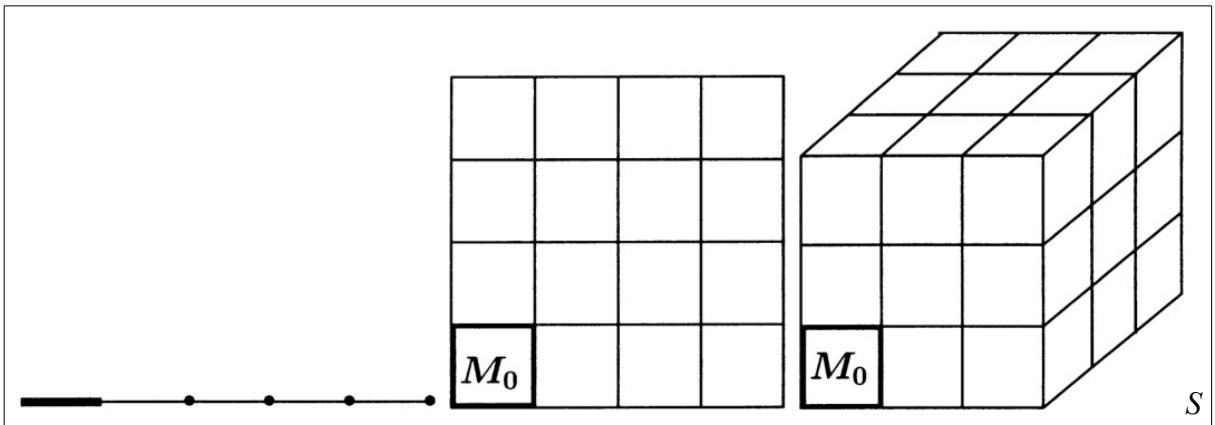
Klasični primeri sebipodobnih množic so na primer *Kochova krivulja* (na sliki 1), *Cantorjeva množica* in *trikotnik Sierpinskega* (glej sliko 3).



*Slika 3: Cantorjeva množica in trikotnik Sierpinskega (vir [3])*

## 1.3. O dimenzijah

»Običajno dimenzijo«, kot jo poznamo, lahko opišemo takole. Vzemimo daljico, kvadrat in kocko (slika 4). Daljico, ki je dolga $a$, razdelimo na 4 enake dele. Vsak del je ¼ prvotne dolžine, torej je prvotna daljica štirikrat daljša od pomanjšanega dela. Faktor pomanjšave (tudi faktor povečave ali faktor skrčitve; je enak razmerju prvotni del/pomanjšani del) je torej 4. Označimo število manjših delov z $N$ = 4, faktor povečave s $p$ = 4 in dimenzijo z $d$ = 1. Torej velja: $4=4^1$. Pri kvadratu imamo: $N$ = 16, $p$=4 in $d$=2, torej $16=4^2$, pri kocki pa je $N$ = 27, $p$ = 3 in $d$ = 3, torej $27=3^3$. To lastnost posplošimo. Naj bo število enakih pomanjšanih delov enako $N$, faktor skrčitve $p$ = (prvotna stranica)/(pomanjšani del) in $d$ dimenzija. Tedaj velja zveza: $N=p^d$, od koder izračunamo dimenzijo objekta: $d=\log_p N=\frac{\log N}{\log p}$. To definicijo pa lahko posplošimo na sebipodobne objekte.




*Slika 4: Daljico, kvadrat in kocko razdelimo na enake dele (Vir: [3]).*

**Definicija 2: Fraktalna dimenzija (dimenzija sebipodobnosti)**

***Dimenzija sebipodobnosti*** **objekta X je enolična vrednost $d$, ki ustreza enačbi $N=p^d$ oziroma $d=\frac{\log N}{\log p}$, kjer je $N$ število med seboj enakih delov, na katere razdelimo objekt X, število $p$ pa faktor skrčitve ($p$>1).**

Število $d$ ni nujno celo število. Če število ni celo, ga imenujemo fraktalna dimenzija sebipodobnosti (povzeto po 2], stran 18,19).

Primeri:

a) Kochova krivulja ($N$ = 4, $p$ = 3): $N = p^d \rightarrow 4 = 3^d \Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26185950714$

b) Cantorjeva množica ($N$ = 2, $p$ = 3): $N = p^d \rightarrow 2 = 3^d \Rightarrow d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0{,}63092975357$

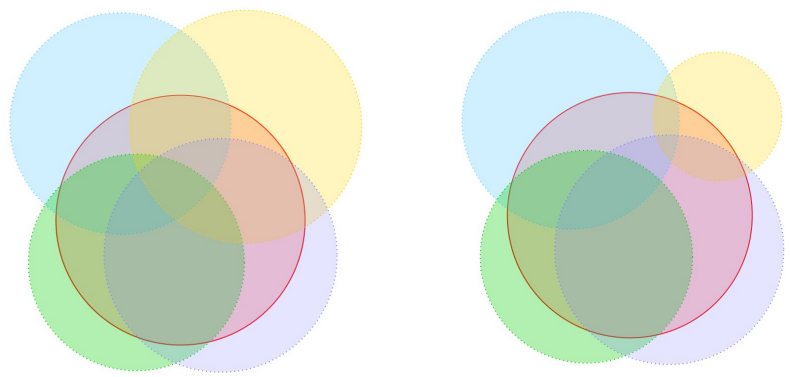
c) trikotnik Sierpinskega ($N$ = 3, $p$ = 2): $N = p^d \rightarrow 3 = 2^d \Rightarrow d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58496250072$

**Definicija 3: Topološka dimenzija**

**»Topološka dimenzija topološkega prostora $X$ je enaka najmanjšemu takemu številu $n$, da lahko za vsako odprto pokritje $C$ najdemo finejše pokritje $C'$, ki ima to lastnost, da je vsaka točka prostora $X$ element kvečjemu $n+1$ članov pokritja $C'$.**

*Pri tem je odprto pokritje $C'$ finejše od pokritja $C$, če je vsak element pokritja $C'$ vsebovan v vsaj enem elementu pokritja $C$.« ([2], stran 23).*

Topološka dimenzija je vedno celo število.



*Slika 5: Primer pokritja kroga s krogi.*

Na levi sliki (glej sliko 5) je krog pokrit s štirimi odprtimi krogi (brez robov), znotraj kroga so točke, ki so prekrite z vsemi štirimi krogi. Vendar lahko enega izmed krogov (na primer gornjega desnega) zmanjšamo, tako da so točke prekrite z največ 3 krogi. Manj kot to ni možno, ker so krogi odprti (nimajo robov). Topološka dimenzija kroga je torej enaka 2. Enako velja tudi za ostale ravninske like. Krožnico pa lahko pokrijemo s pokritjem, ki je sestavljeno najmanj iz dveh krožnih lokov (upoštevamo, da so loki odprti, torej brez končnih točk). Tako je topološka dimenzija krožnice enaka 1. (Prirejeno po [2]).

## *1.4. Definicija fraktala*

**Definicija 4: Definicija fraktala**

**»Fraktal je množica, ki je sebipodobna in katere fraktalna dimenzija je večja od njene topološke dimenzije.« ([2], stran 24).**

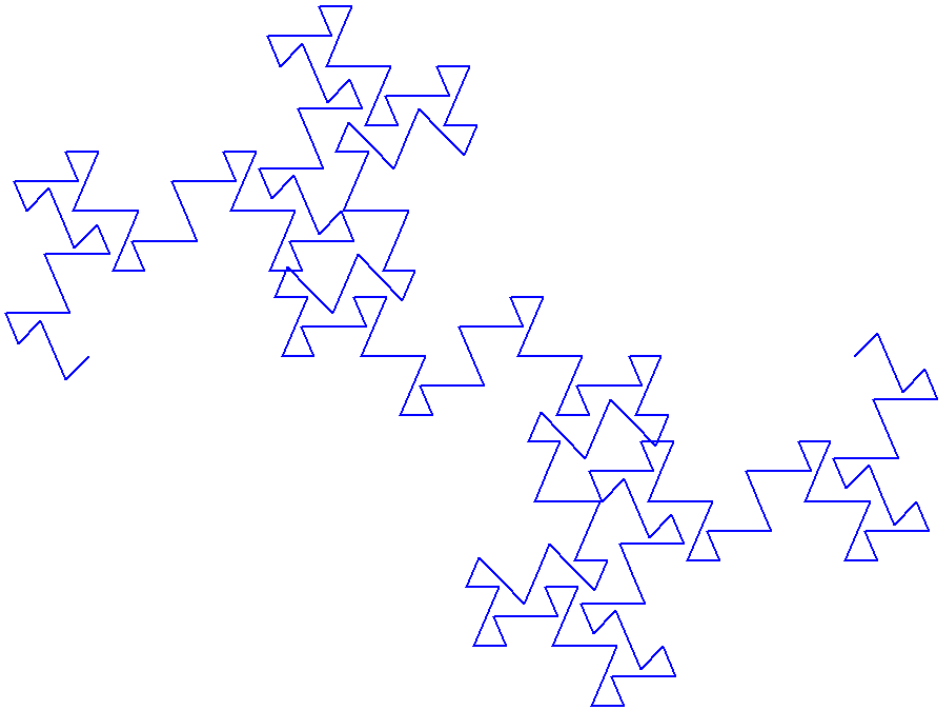
## *1.5. Fraktalne krivulje*

Lepi primeri fraktalov so fraktalne krivulje, na primer Kochova krivulja. V nalogi se bomo omejili na tiste krivulje, pri katerih ne pride do dotikanja ali prekrivanja.

**Definicija 5: Definicija enostavne krivulje**

**Krivulja je enostavna, če nikjer ne seka sama sebe ali se nikjer ne dotika sama sebe.**

Primer enostavne krivulje je na sliki 1, primer krivulje, ki ni enostavna, pa na sliki 6.



*Slika 6: Primer krivulje, ki ni enostavna (na dveh mestih se krivulja dotika, na dveh pa seka samo sebe).*

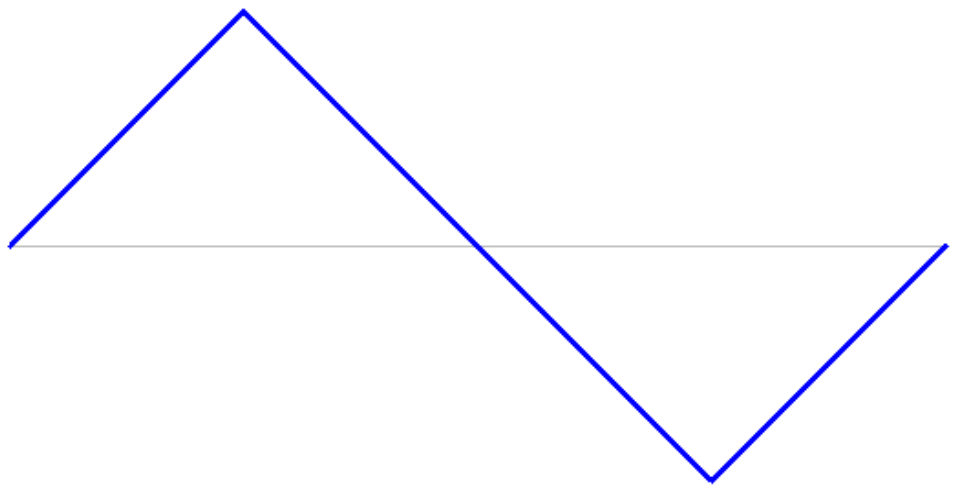
**Definicija 6: Definicija fraktalne krivulje**

**Fraktalna krivulja je enostavna, povezana krivulja, ki je fraktal.**

## 1.6. Fraktalna krivulja »cik-cak«

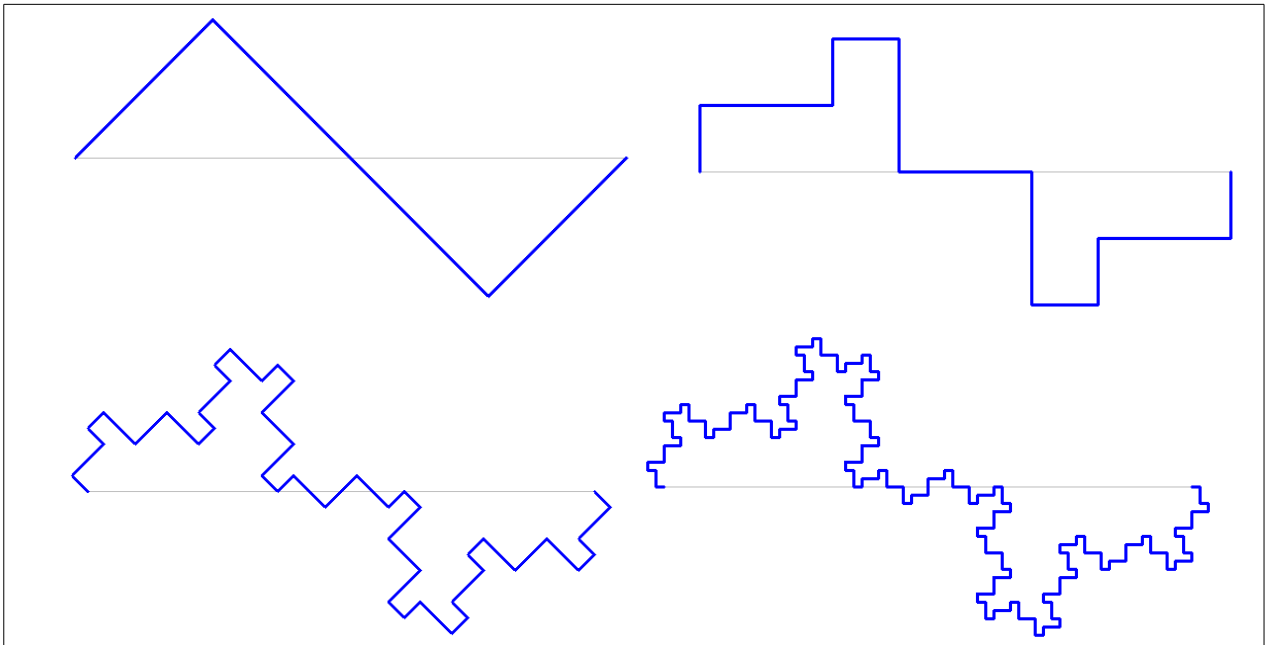
### 1.6.1. Osnovni primer

Osnovni primer fraktalne krivulje »cik-cak« (ime sem določil sam) je podan z generatorjem na sliki 7, sama krivulja na prvih štihih nivojih pa je lepo vidna na sliki 8. Sestavljata jo dva enakokraka trikotnika (vsak na svojem bregu začetne daljice). Koti ob osnovnicah so enaki $45^0$, kot ob vrhu je pravi kot. Dolžina kraka je enaka diagonali kvadrata s stranico $\frac{a}{4}$.



*Slika 7: Generator osnovne krivulje "cik-cak" (z rahlo črto je prikazana začetna daljica)*

Krak je tako enak $l_1 = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Število pomanjšanih delov je $N = 4$, faktor pomanjšave pa $p = \frac{a}{\frac{a}{4}\sqrt{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$. Njena dimenzija je tako enaka $N = p^d \rightarrow 4 = (2^{\frac{3}{2}})^d \Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 2^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}$. Zanimivo, dobili smo dimenzijo, ki je enaka racionalnemu številu. V viru [1] je navedeno, da so fraktalne krivulje z racionalno dimenzijo zelo redke. Trditev se mi ne zdi korektna, zato bom v nadaljevanju naloge dokazal, da obstaja neskončno fraktalnih krivulj, ki imajo fraktalno dimenzijo sebipodobnosti enako racionalnemu številu.

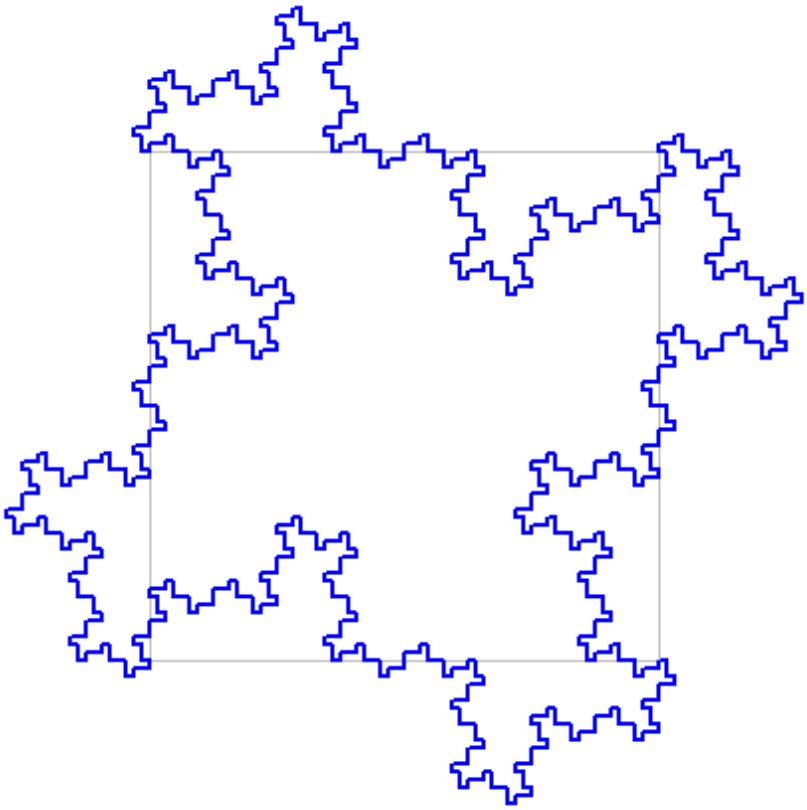


*Slika 8: Prvi štirje nivoji fraktalne osnovne fraktalne krivulje "cik-cak".*

Izračunajmo dolžino osnovne fraktalne krivulje (to je krivulje »cik-cak« z začetnim kotom $45^0$).

Dolžina začetne krivulje je enaka $a$. Dolžina krivulje prvega nivoja je enaka $d_1=4a\cdot 2^{\frac{3}{2}}$, ker je faktor skrčitve enak $p=\frac{a}{\frac{a}{4}\sqrt{2}}=a^{\frac{3}{2}}$. Dolžina enega kraka krivulje drugega nivoja je enaka $l_2=a\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=a(2^{\frac{3}{2}})^2$, dolžina cele krivulje drugega nivoja pa $d_2=16a(2^{\frac{3}{2}})^2$. Podobno dobimo za tretji nivo: $l_3=a\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=a(2^{\frac{3}{2}})^3$ in $d_2=64a(2^{\frac{3}{2}})^3$. Izraz posplošimo na nivo $n$ in dobimo: $l_n=a\cdot(2^{\frac{3}{2}})^n$ in $d_n=4^n a\cdot(2^{\frac{3}{2}})^n=a\cdot 2^{\frac{7n}{2}}$. Dolžina limitne krivulje je tako neskončna, saj je $\lim_{n\to\infty}(a\cdot 2^{\frac{7n}{2}})=\infty$, ker je osnova potence večja od 1.

Poglejmo še, kolikšna je ploščina lika, omejenega s krivuljami cik-cak. Vzemimo »kvadrat« (glej sliko 9).



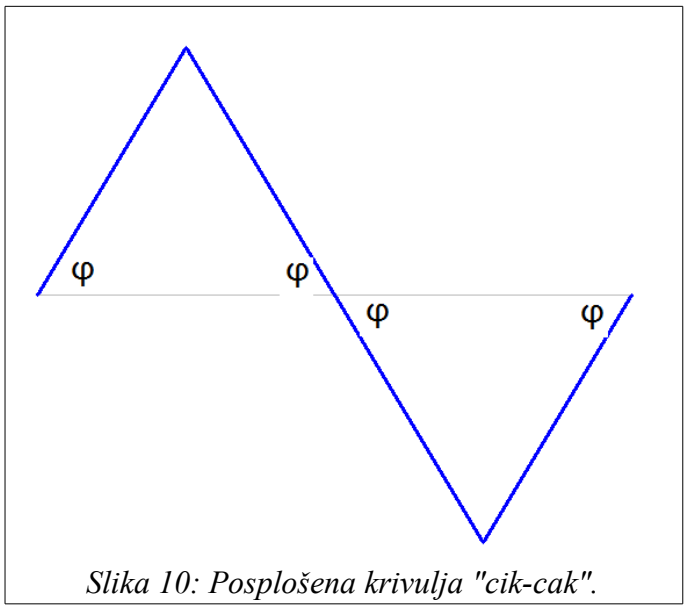
*Slika 9: "Kvadrat", ograjen z osnovno krivuljo "cik-cak".*

Ploščina »kvadrata« je seveda enaka $a^2$, saj je del lika izven kvadrata ploščinsko enak delu lika znotraj kvadrata. Zanimivo: neskončna krivulja oklepa lik s končno ploščino (enako velja tudi za Kochovo snežinko). Pa še nekaj sem opazil. Z več gornjimi »kvadrati« lahko tlakujemo ravnino.

### 1.6.2. Posplošitev

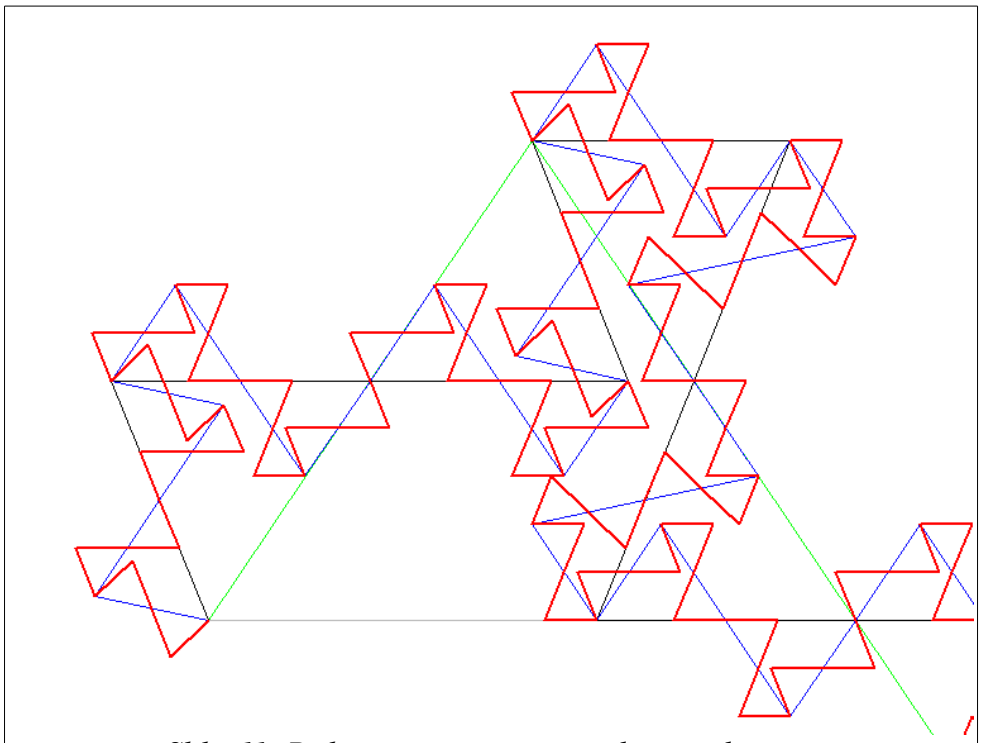
Osnovno fraktalno krivuljo cik-cak posplošimo tako, da spreminjamo začetni kot zasuka. Osnovna krivulja ima kot zasuka enak $45^0$, sedaj pa posplošimo na poljuben kot. Seveda ostaja ostalo enako: štirje deli in dva enakokraka trikotnika. Primer je na sliki 10.

Izrazimo dimenzijo te krivulje z dolžino začetne daljice $l_0 = a$ (v nadaljevanju tudi *osnovnica fraktalne* krivulje) in kotom zasuka. Število pomanjšanih delov je $N$ = 4. Dolžina kraka pri prvem nivoju je enaka $l_1 = \frac{a}{4\cos\varphi}$. Faktor pomanjšave je enak $p = \frac{a}{l} = 4\cos\varphi$. Dimenzija je potem enaka $d = \frac{\log 4}{\log(4\cos\varphi)}$. Pri kotu $45^0$ je $d = \frac{4}{3}$ (kar je seveda enako kot v 1.6.1.).




*Slika 10: Posplošena krivulja "cik-cak".*

Ko je kot zasuka enak $60^0$, je $d=\frac{\log 4}{\log(4\cos 60°)}=2$. Ker je 2 že fraktalna dimenzija sebipodobnosti kvadrata, se bomo omejili na kote, manjše od $60^0$. V primeru kota $60^0$ pride do velikega števila prekrivanj, zato ne dobimo enostavne krivulje. Omejili se bomo na kote, ki so večji od $0^0$ in manjši od $60^0$. Z opazovanjem (glej sliko 11) ugotovimo, da pride do dotikanja na posameznem nivoju že pri kotih, ki so manjši od $60^0$.



*Slika 11: Prikazani so štirje nivoji drug za drugim.*

Na sliki 11 so prikazani štirje zaporedni nivoji pri kotu $55^0$. Opazimo, da pri četrtem nivoju krivulja dotakne samo sebe. Pri večjih kotih pa bo seveda prišlo do sekanja krivulje samo s seboj (ne bo več enostavna).

**Definicija 7: Dotikalni kot**

**Dotikalni kot posameznega nivoja fraktalne krivulje je mejni kot, pri katerem pride do dotikanja krivulje same s seboj.**

V nadaljevanju bomo med drugim ugotavljali dotikalne kote posameznih nivojev fraktalne krivulje cik-cak.

# 2. CILJ NALOGE IN METODE DELA

## *2.1. Cilji naloge in hipoteze*

V splošnem je namen naloge preiskovanje dimenzije sebipodobnosti fraktalnih krivulj in iskanju dotikalnega kota izbrane krivulje s krivuljo samo.

### Prvi cilj

V viru [1] je navedeno, da obstajajo le redke krivulje, katerih fraktalna dimenzija je racionalno število. Omenjeni sta dve fraktalni krivulji s to lastnostjo. Njuna generatorja sta na sliki 12. Za cilj sem si zastavil dokazati, da obstaja neskončno fraktalnih krivulj s fraktalno dimenzijo, enako racionalnemu številu.

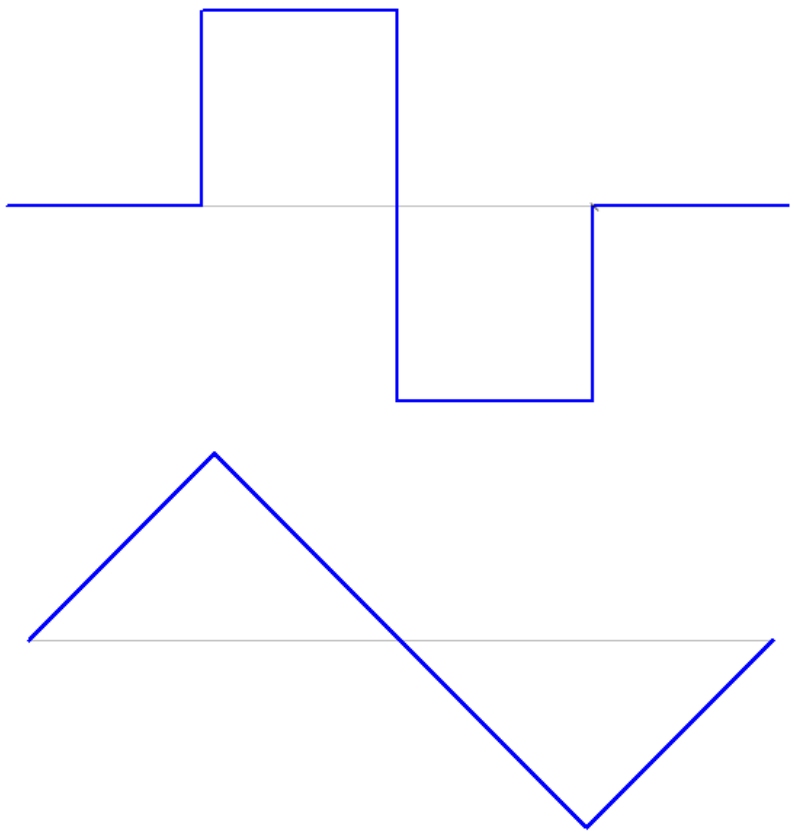
### Drugi cilj

V razdelku 1.6. sem opazil, da pride pri fraktalni krivulji »cik-cak« do prekrivanja krivulje na določenem nivoju, če spreminjamo dani kot zasuka. Za cilj sem si postavil izračunati dotikalni kot za drugi, tretji, četrti, peti, šesti in sedmi nivo in določiti približek dotikalnega kota limitne krivulje »cik-cak«.

**Oblikoval sem dve hipotezi:**

**Hipoteza 1:** ***Obstaja neskončno fraktalnih krivulj, ki imajo fraktalno dimenzijo enako racionalnemu številu.***

**Hipoteza 2:** ***Za nekaj prvih nivojev fraktalne krivulje »cik-cak« lahko izračunamo dotikalni kot. Dotikalni kot limitne krivulje »cik-cak« lahko dobro ocenimo.***



*Slika 12: Generatorja krivulj iz vira [1], ki imata fraktalno dimenzijo enako racionalnemu številu.*

## 2.2. Metode dela

Poleg običajne metode študija po literaturi in drugih virih sem pri izdelavi naloge uporabil naslednji metodi:

- **metoda opazovanja in**
- **matematično dokazovanje trditev.**

Za poenostavljanje daljših matematičnih izrazov, za reševanje enačb in preiskovanje sem uporabljal program DERIVE 6.

Krivulje sem risal s programom Python 3.3.4, prosto dostopnim na spletnem naslovu https://www.python.org/, ter s programom GeoGebra, ki je prav tako prosto dostopen na naslovu http://www.geogebra.org/cms/sl/.

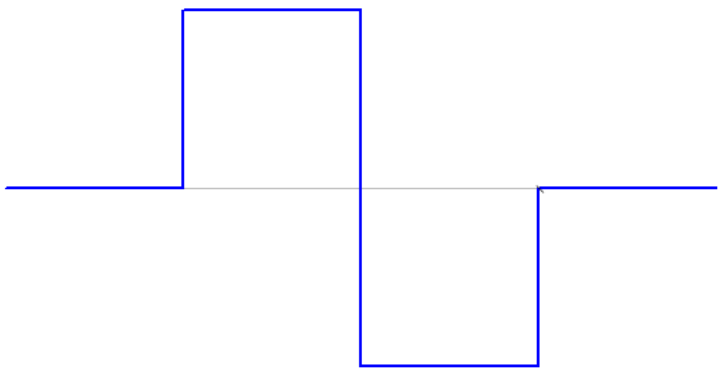
# 3. FRAKTALNE KRIVULJE S FRAKTALNO DIMENZIJO, ENAKO RACIONALNEMU ŠTEVILU

**Trditev 1:** ***Obstaja števno neskončno fraktalnih krivulj, ki imajo fraktalno dimenzijo enako racionalnemu številu.***

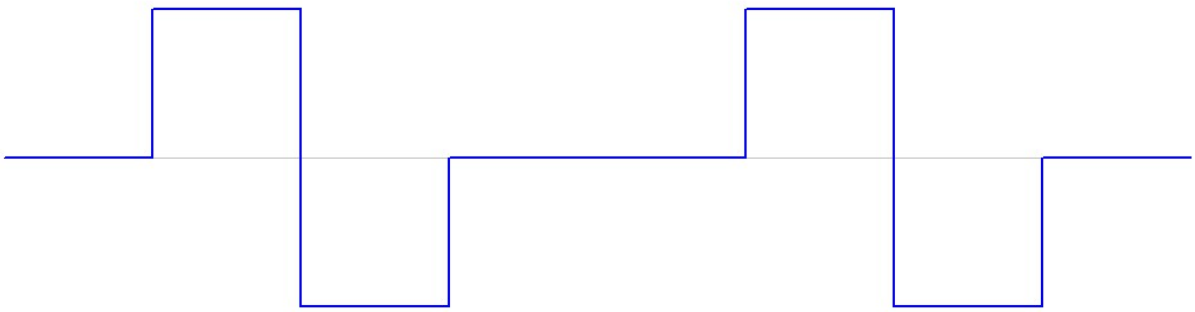
Našo trditev bomo dokazali na dva načina, pri čemer je drugi dokaz omejen le na fraktalne krivulje »cik-cak«.

## *3.1. Prvi dokaz*

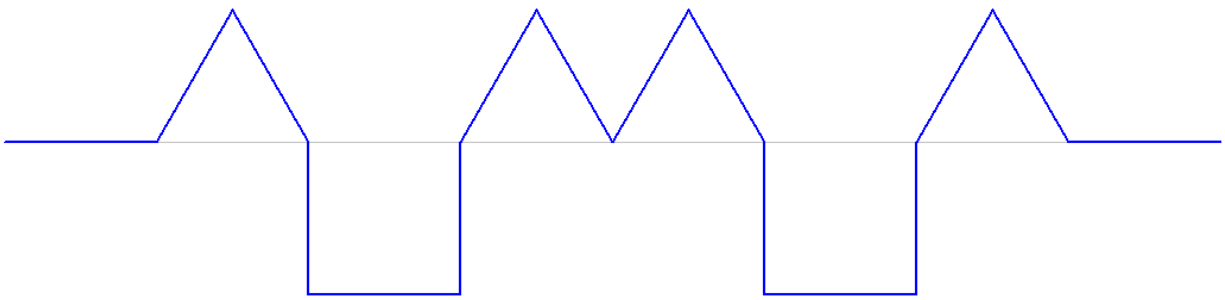
Vzemimo daljico dolžine $a$ in jo razdelimo na štiri dolžinsko enake dele. Vzemimo osem takih kosov in jih postavimo, kakor kaže slika 13. Dimenzija te fraktalne krivulje je enaka $d = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3}{2}$, kar je racionalno število. Podobno lahko daljico razdelimo na osem enakih delov, vzamemo šestnajst takih kosov in jih sestavimo, da dobimo krivuljo (lomljeno črto). Sestavimo jih lahko na različne načine (glej sliki 14 in 15). Dimenzija take krivulje je potem $d = \frac{\log 16}{\log 8} = \frac{4}{3}$.



*Slika 13: K prvemu dokazu trditve 1.*



*Slika 14: Ena od možnih osnovnih krivulj, ki nastane, če daljico razdelimo na 8 enakih delov in 16 takih kosov sestavimo v sklenjeno krivuljo.*



*Slika 15: Še ena izmed variant krivulje na sliki X.*

Očitno je možno iz daljice, ki jo razdelimo na $2^n$ delov, vedno mogoče sestaviti krivuljo iz $2 \cdot 2^n$ takih delov. Če si še enkrat ogledamo sliki 15 in 16, opazimo, da imamo z naraščajočim $n$ vedno več možnih načinov, na katere lahko postavimo fragmente daljice.

A že brez tega lahko dokažemo, da je fraktalnih krivulj z dimenzijo, ki je enaka racionalnemu številu in jih ustvarimo na ta način, neskončno mnogo. Razdelimo torej daljico na $2^n$ enakih delov, vzemimo $2 \cdot 2^n$ takih kosov in sestavimo fraktalno krivuljo prve stopnje. Njena dimenzija bo tako

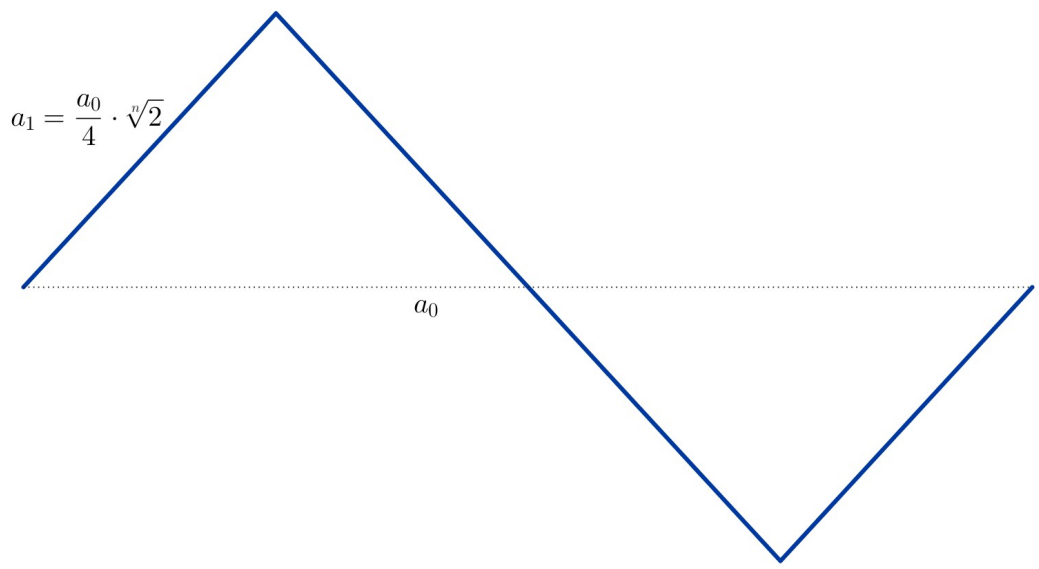
(*1*) $$d = \frac{\log(2 \cdot 2^n)}{\log(2^n)} = \frac{\log 2^{n+1}}{\log 2^n} = \frac{n+1}{n},$$

kar je očitno racionalno število za vsako naravno število $n$. Veljati pa mora še $1 < d < 2$ oziroma $1 < \frac{n+1}{n} < 2$.

1. $\frac{n+1}{n} > 1$ : preuredimo v $n+1 > n$, kar velja za katerokoli naravno število $n$. Vrednost slednjega tako navzgor ni omejena.
2. $\frac{n+1}{n} < 2$ : preuredimo v $n+1 < 2n$ oziroma $1 < n$. Torej mora biti vrednost $n$ večja od 1.

Ker je naravnih števil, ki so večja od 1, neskončno mnogo, je tako tudi racionalnih števil oblike $\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}$ neskončno mnogo. Iz tega sledi, da je fraktalnih krivulj, ki jih tvorimo na ta način in imajo dimenzijo, enako racionalnemu številu, neskončno mnogo. *q.e.d.*

## 3.2. Drugi dokaz




*Slika 16: Slika k drugemu dokazu trditve 1.*

Vzemimo fraktalno krivuljo »cik-cak«, katere osnovnica je enaka $a_0$ (na sliki 16 s črtkano črto), dolžina ene izmed daljic na prvem nivoju pa je $a_1 = \frac{a_0}{4}\sqrt[n]{2}$. Faktor pomanjšave je tako $p = \frac{a_0}{a_1} = \frac{4}{\sqrt[n]{2}} = \frac{2^2}{2^{\frac{1}{n}}} = 2^{\frac{2n-1}{n}}$. Število kosov pa je $N = 4 = 2^2$. Torej je fraktalna dimenzija take krivulje enaka

(2) $$d = \frac{\log N}{\log p} = \frac{\log 2^2}{\log 2^{\frac{2n-1}{n}}} = \frac{2n}{2n-1}.$$

Omejiti moramo le še $n$. Vemo, da mora veljati $1 < d < 2$. Tako lahko zapišemo dve neenačbi:

1. $d > 1$ oziroma $\frac{2n}{2n-1} > 1$, kar preoblikujemo v $2n > 2n-1$ in v $0 > -1$. Ugotovimo, da vrednost $n$ navzgor ni omejena.
2. $d < 2$ oziroma $\frac{2n}{2n-1} < 2$, kar preoblikujemo v $2n < 4n-2$. Končna neenačba se tako glasi $n > 1$.

Po formuli (*2*) je očitno, da bomo za vsako naravno število $n$, ki je večje od 1, dobili fraktalno krivuljo z dimenzijo $d$, ki bo enaka racionalnemu številu. Ta enakost pa velja tudi za vsako racionalno število $\frac{m}{n}$

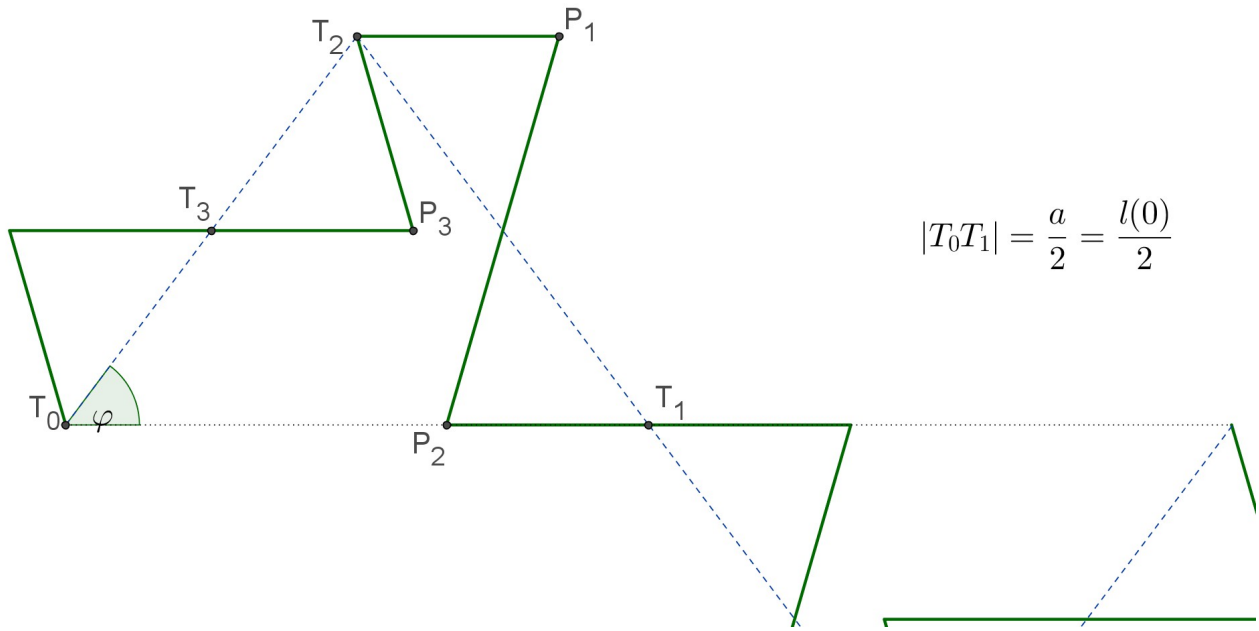
$$\frac{2\frac{m}{n}}{2\frac{m}{n}-1}=\frac{2m}{2m-n},$$

kjer sta $m$ in $n$ naravni števili, za kateri velja, da $\frac{m}{n}>1 \Leftrightarrow m>n$. Ker je tako naravnih števil, ki so večja od 1, kot tudi racionalnih števil, ki so večja od 1, neskončno mnogo, je tudi fraktalnih krivulj »cik-cak« z dimenzijo $d$, ki je enaka racionalnemu številu, neskončno mnogo. *q.e.d.*

# 4. DOTIKALNI KOTI FRAKTALNE KRIVULJE »CIK-CAK«

## 4.1. Dotikalni kot krivulje »cik-cak« drugega nivoja

**Trditev 2:** ***Dotikalni kot krivulje »cik-cak« drugega nivoja je enak*** $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ **.**




*Slika 17: Del drugega nivoja krivulje, narisan preko začetnega dela krivulje na prvem nivoju (črtkana črta).Označene so točke iz dokaza trditve 2.*

**Ideja dokaza:** Z opazovanjem krivulje med spreminjanjem kota ugotovimo, da bo do dotikanja prišlo tedaj, ko bo točka $P_3$ ležala na daljici $P_1P_2$. Ustrezni kot dobimo s »postavljanjem« točke $P_3$ na že omenjeno daljico tako, da najprej določimo enačbo nosilke daljice $P_1P_2$ in vanjo nato vstavimo koordinati točke $P_3$. Z rešitvijo enačbe dobimo kot, pri katerem pride do dotikanja.

**Izvedba dokaza:** Naj bo dolžina stranice fraktalne krivulje »cik-cak« z začetnim kotom $\varphi$ enaka $a$. Višina trikotnika $T_0T_1T_2$ je potemtakem $\frac{a}{4}\cdot\tan\varphi$. Koordinate točk $T_0, T_1$ in $T_2$ so $T_0(0,0)$, $T_1(\frac{a}{2},0)$ in $T_2(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\cdot\tan\varphi)$ (glej sliko 17). Pri dokazih bomo potrebovali še funkcijo $l(s)=\frac{a}{(4\cos\varphi)^s}$, ki podaja dolžino posamezne daljice te krivulje na nivoju (stopnji) $s$.

Točka $T_3$ razpolavlja daljico $T_0T_2$, zato velja $\vec{r}_{T3}=\frac{1}{2}(\vec{r}_{T0}+\vec{r}_{T2})=(\frac{a}{8},\frac{a}{8}\cdot\tan\varphi)$ in je tako $T_3(\frac{a}{8},\frac{a}{8}\cdot\tan\varphi)$. Nadalje velja, da je nosilka daljice $T_3P_3$ vzporedna z osnovnico trikotnika $T_0T_1T_2$ (ker je $\angle P_3T_3T_2=\varphi$). Zato za točko $P_3$ velja $\vec{r}_{P3}=\vec{r}_{T3}+(l(2),0)$ in s tem $P_3(\frac{a}{8}+\frac{a}{16\cos^2\varphi},\frac{a}{8}\cdot\tan\varphi)$.

Nosilka daljice $P_1P_2$, imenujmo jo $p$, oklepa z osnovnico fraktalne krivulje kot $\pi-2\varphi$ (glej točko 1.6.2.), zato je njen smerni koeficient $k_p=\tan(\pi-2\varphi)=-\tan 2\varphi$. Da premico natanko določimo, potrebujemo le še njeno začetno vrednost, torej $n_p$. Ker leži točka $P_2$ na premici $p$, vstavimo njene koordinate v zvezo

$$y=k_p\cdot x+n_p\Rightarrow n_p=y-k_p\cdot x$$

Torej velja:

$n_p=0-(-\tan 2\varphi)(\frac{a}{2}-l(2))=(-\tan 2\varphi)(\frac{a}{16\cos^2\varphi}-\frac{a}{2})=a\tan 2\varphi\cdot\frac{8\cos^2\varphi-1}{16\cos^2\varphi}$, enačba premice pa je tako $y=-\tan 2\varphi\cdot a+a\tan 2\varphi\cdot\frac{8\cos^2\varphi-1}{16\cos^2\varphi}$.

Da pride v našem primeru do prekrivanja, mora točka $P_3$ ležati na premici $p$.

Enačba za izračun kota se torej glasi:

$$\frac{a}{8}\cdot\tan\varphi=-\tan 2\varphi\cdot(\frac{a}{8}+\frac{a}{16\cos^2\varphi})+a\tan 2\varphi\cdot\frac{8\cos^2\varphi-1}{16\cos^2\varphi}$$

in urejeno

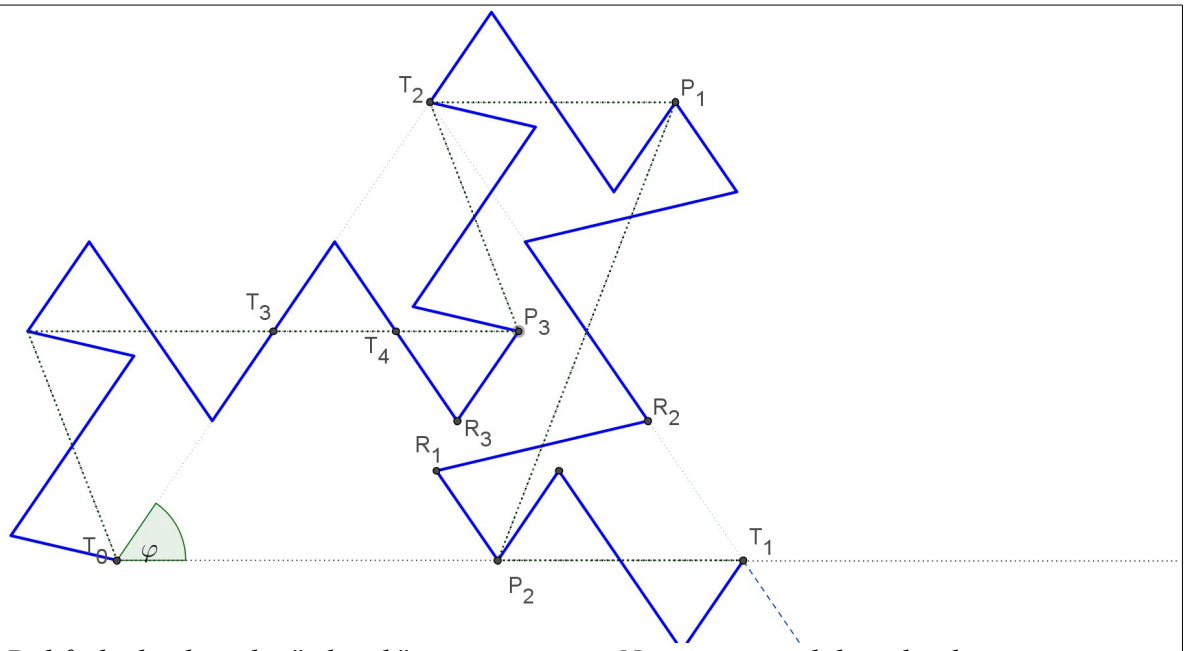
$$\frac{a}{8}\tan\varphi+\tan 2\varphi\cdot\frac{a}{8}\cdot(1+\frac{1}{2\cos^2\varphi})-\frac{a}{8}\tan 2\varphi\cdot\frac{8\cos^2\varphi-1}{2\cos^2\varphi}=0\,.$$

Enačbo delimo z $\frac{a}{8}\neq 0$, da dobimo $\tan\varphi+\tan 2\varphi(1+\frac{1}{2\cos^2\varphi})-\tan 2\varphi\cdot\frac{8\cos^2\varphi-1}{2\cos^2\varphi}=0$. Izraz se poenostavi v $\tan\varphi\frac{4\cos^2\varphi-1}{1-2\cos^2\varphi}=0$ (poenostavil sem ga z uporabo računalniškega programa DERIVE

6). Ker vemo, da $\varphi \neq 0$ in s tem $\tan\varphi \neq 0$, lahko izraz še bolj poenostavimo in dobimo $4\cos^2\varphi - 1 = 0$ oziroma $\cos\varphi = \pm 1/2$. Izberemo pozitivno vrednost, ker iščemo ostri kot med vrednostma 0 in $\frac{\pi}{3}$. Dobimo $\varphi_2 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. *q.e.d.*

## 4.2. Dotikalni kot krivulje »cik-cak« tretjega nivoja

**Trditev 3:** ***Dotikalni kot krivulje »cik-cak« tretjega nivoja je enak*** $\varphi_3 = \frac{\pi}{3}$ **.**




*Slika 18: Del fraktalne krivulje "cik-cak" tretjega nivoja. Narisana je tudi krivulja drugega nivoja .*

**Ideja dokaza:** Ideja je podobna kot pri dokazu trditve 2. Do dotikanja krivulje same s sabo bo prišlo tedaj, ko bo točka $R_3$ ležala na daljici $R_1 R_2$. Dotikalni kot dobimo s »postavljanjem« točke $R_3$ na že omenjeno daljico, preko enačbe premice nosilke daljice $R_1 R_2$ (glej sliki 18 in 19).

**Izvedba dokaza**: Vzemimo fraktalno krivuljo »cik-cak« na tretjem nivoju. Točke $T_0, T_1, T_2, T_3, P_1, P_2$ in $P_3$ so iste kakor pri dokazu trditve 2 (na sliki 18 je vidna tudi krivulja druge stopnje). Izberemo še točke $T_4, R_1, R_2$ in $R_3$, katerih lega je lepo vidna na zgornji sliki. Točka $T_4$ je razpolovišče daljice $T_3 P_3$, zato so njene koordinate

$$T_4\left(\frac{\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{a}{16\cos^2\varphi}}{2}, \frac{\frac{a}{8}\tan\varphi+\frac{a}{8}\tan\varphi}{2}\right),$$

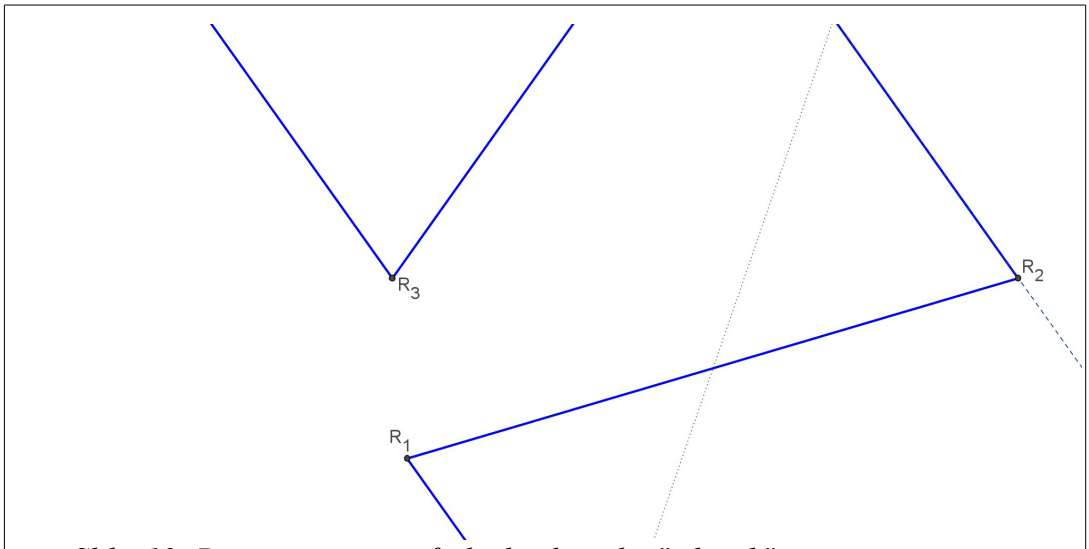
kar poenostavimo v $T_4(a\frac{4\cos^2\varphi+1}{32\cos^2\varphi},\frac{a}{8}\tan\varphi)$.

Abscisa točke $R_3$ je enaka abscisi razpolovišča daljice $T_4P_3$, njena ordinata pa je za $l(3)\sin\varphi$ manjša od ordinate točke $T_4$. Torej so njene koordinate enake

$$R_3(\frac{a\frac{4\cos^2\varphi+1}{32\cos^2\varphi}+\frac{a}{8}+\frac{a}{16\cos^2\varphi}}{2},\frac{a}{8}\tan\varphi-\frac{a}{64\cos^3\varphi}\sin\varphi).$$

Z uporabo računalniškega programa DERIVE 6 pa lahko koordinate poenostavimo v

$$R_3(a\frac{8\cos^2\varphi+3}{64\cos^2\varphi},a\tan\varphi\frac{8\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi}).$$




*Slika 19: Povečan segment fraktalne krivulje "cik-cak" na tretjem nivoju.*

Naj bo nosilka daljice $R_1R_2$ premica $r$. Ta premica oklepa z abscisno osjo kot $\alpha$. Izračunajmo ga. Ker je $\angle R_1R_2T_2=\pi-2\varphi$, meri kot $\angle R_1R_2T_1=2\varphi$. Nadalje velja $\angle P_2T_1R_2=\varphi$. Tako je $\alpha=\pi-\varphi-2\varphi=\pi-3\varphi$. Smerni koeficient premice $r$ je tako $k_r=\tan\alpha=\tan(\pi-3\varphi)=-\tan(3\varphi)$.

Enačbo premice $r$ iščemo v obliki $y=k_rx-n_r$. Na njej leži točka $R_1$, katere koordinate so

$R_1(\frac{a}{2}-l(2)-l(3)\cos\varphi,l(3)\sin\varphi)$ oziroma $R_1(a\frac{32\cos^2\varphi-5}{64\cos^2\varphi},\frac{a\tan\varphi}{64\cos^2\varphi})$. Za določitev premice $r$ v enačbo $y=k_rx-n_r$ vstavimo koordinate točke $R_1$ in določimo konstanto $n_r$. Tako dobimo enačbo premice $r$, ki se glasi:

(*3*) $$y=-\tan(3\varphi)x+a\tan\varphi\frac{64\cos^4\varphi-24\cos^2\varphi+1}{32\cos^2\varphi(1-4\sin^2\varphi)}.$$

Po premisleku, podobnem tistemu pri prejšnjem dokazu, ugotovimo, da bo enakost (*3*) veljala za koordinati točke $R_3$ natanko tedaj, ko bo le-ta ležala na premici $r$ in bo s tem prišlo do prekrivanja. Torej lahko v zgornjo enačbo vstavimo koordinati točke $R_3$

$$a\tan\varphi\frac{8\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi}=-\tan(3\varphi)a\frac{8\cos^2\varphi+3}{64\cos^2\varphi}+a\tan\varphi\frac{64\cos^4\varphi-24\cos^2\varphi+1}{32\cos^2\varphi(1-4\sin^2\varphi)},$$

jo uredimo

$$a\tan\varphi\frac{8\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi}+\tan(3\varphi)a\frac{8\cos^2\varphi+3}{64\cos^2\varphi}-a\tan\varphi\frac{64\cos^4\varphi-24\cos^2\varphi+1}{32\cos^2\varphi(1-4\sin^2\varphi)}=0$$

in poenostavimo

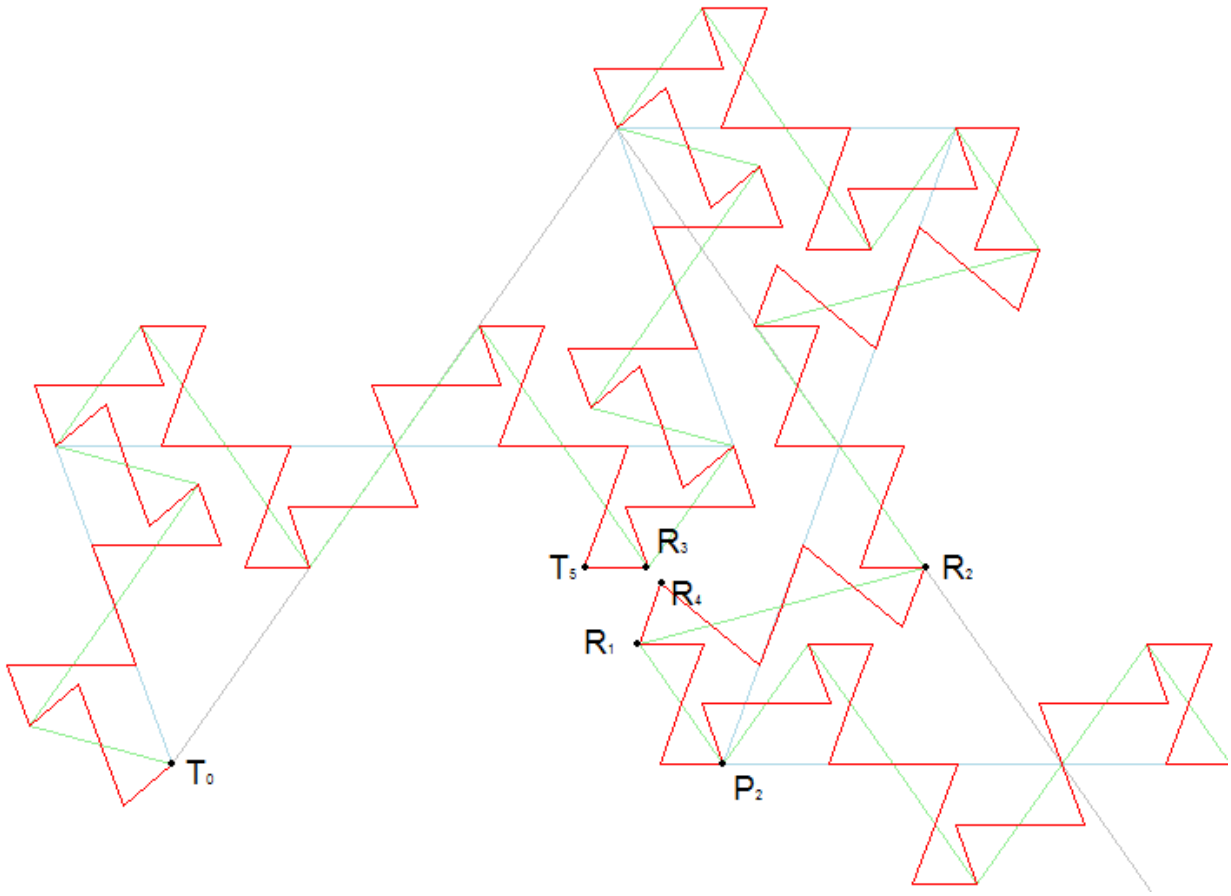
$$a\tan\varphi\frac{32\cos^4\varphi-12\cos^2\varphi+1}{32\cos^2\varphi(4\sin^2\varphi-1)}=0.$$

Ker vemo, niti $a$ niti $\tan\varphi$ nista enaka 0, je enačba, ki jo moramo rešiti, pravzaprav le enačba $32\cos^4\varphi-12\cos^2\varphi+1=0$. Namesto $\cos\varphi$ lahko pišemo $t$ in s tem dobimo enačbo $32t^4-12t^2+1=0$. To je bikvadratna enačba, njene rešitve pa so $t_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$ in $t_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$. Ker iščemo kot z intervala $[0,\frac{\pi}{3}]$, negativni rešitvi ne prideta v poštev. Ker pa je $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{4})>\frac{\pi}{3}$, je tako edina možna rešitev te enačbe $\varphi_3=\arccos(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$. *q.e.d.*

## 4.3. Dotikalni kot krivulje »cik-cak« četrtega nivoja

**Trditev 4:** ***Dotikalni kot krivulje »cik-cak« četrtega nivoja je enak*** $\varphi_4 = \arccos(\frac{\sqrt{5}}{4})$ **.**

**Ideja dokaza:** Predhodna opazovanja spreminjanja fraktalne krivulje »cik-cak« na četrtem nivoju (glej prilogo 1) nam pokažejo, da bo do stikanja prišlo, ko bo točka $R_4$ ležala na daljici $T_5 R_3$ (glej sliki 20 in 21). Ker za slednjo vemo, da je vzporedna z osnovnico krivulje, moramo le izračunati tisti kot, pri katerem bo ordinata točke $R_4$ enaka ordinati točke $R_3$ .




*Slika 20: Del fraktalne krivulje "cik-cak" četrtega nivoja z nekaterimi označenimi točkami. Vrisani so tudi nekateri prejšnji nivoji.*

**Izvedba dokaza**: Na fraktalni krivulji »cik-cak« vzemimo točke $T_0, P_2, R_1, R_2,$ in $R_3$ tako, kot pri dokazu trditve 3. Njihove koordinate poznamo. Izračunati moramo le ordinato točke $R_4$ .

Kot $\angle R_2 R_1 R_4$ je zaradi sebipodobnosti krivulje enak $\varphi$ . Ker je kot med premico $r$ (nosilko daljice $R_1 R_2$ , glej dokaz trditve 3) in osnovnico enak $\pi - 3\varphi$ (glej dokaz trditve 3), je zato kot med nosilko

daljice $R_1 R_4$ in osnovnico enak $\pi-3\varphi+\varphi=\pi-2\varphi$ . Ta kot uporabimo za računanje ordinate točke $R_4$, ki je za $l(4)\sin(\pi-2\varphi)$ povečana ordinata točke $R_1$: $a\frac{\tan\varphi}{64\cos^2\varphi}+l(4)\sin(\pi-2\varphi)$. S pomočjo računalnika ta izraz zapišemo v obliki $a\frac{3\tan\varphi}{128\cos^2\varphi}$ .

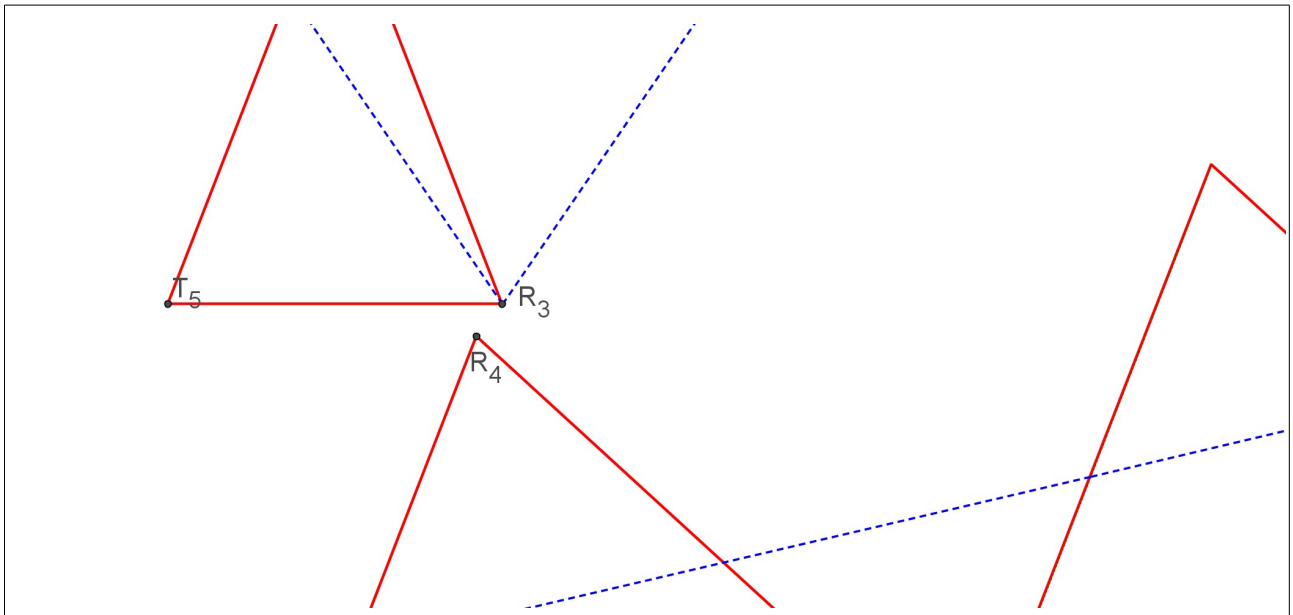
Iz dokaza trditve 3 vzamemo izraz za ordinato točke $R_3$:

$$a\tan\varphi\frac{8\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi},$$

ga enačimo z izrazom za ordinato točke $R_4$

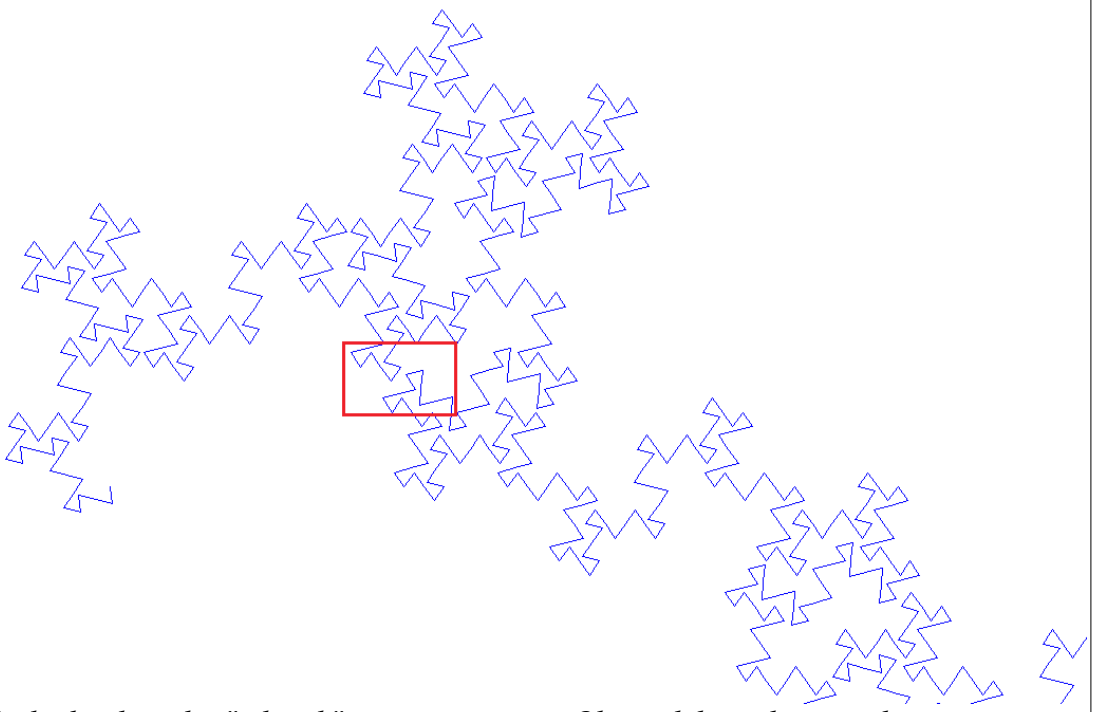
$$a\tan\varphi\frac{8\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi}=a\frac{3\tan\varphi}{128\cos^2\varphi},$$

uredimo in delimo z $a\tan\varphi$, ker vemo, da niti $a$ niti $\tan\varphi$ nista enaka 0. Dobimo enačbo $\frac{16\cos^2\varphi-5}{128\cos^2\varphi}=0$. Edina smiselna rešitev te enačbe pa je $\varphi_4=\arccos(\frac{\sqrt{5}}{4})$, kar je približno $\varphi_4\approx 56{,}01215641°$. *q.e.d.*




*Slika 21: Povečan segment fraktalne krivulje "cik-cak" četrtega nivoja v okolici točke dotikanja. S črtkano črto je narisan del krivulje na tretjem nivoju.*

## 4.4. Dotikalni kot krivulje »cik-cak« petega nivoja



*Slika 22: Fraktalna krivulja "cik-cak" na petem nivoju. Okvirček kaže, kje se nahaja povečan segment na sliki 23.*

**Trditev 5:** ***Dotikalni kot krivulje »cik-cak« petega nivoja je enak*** $\varphi_5 = \arccos \frac{\sqrt{\sqrt{89}+11}}{8}$ **.**

**Ideja dokaza:** Z opazovanjem dogajanja v okolici (okvirček na sliki 22 in slika 23), kjer se krivulja stakne sama s sabo, ugotovimo, da bo do dotikanja prišlo, ko bo točka $R_4$ ležala na daljici $R_3 R_5$. Princip dokaza je enak principoma dokazov trditev 2 in 3.

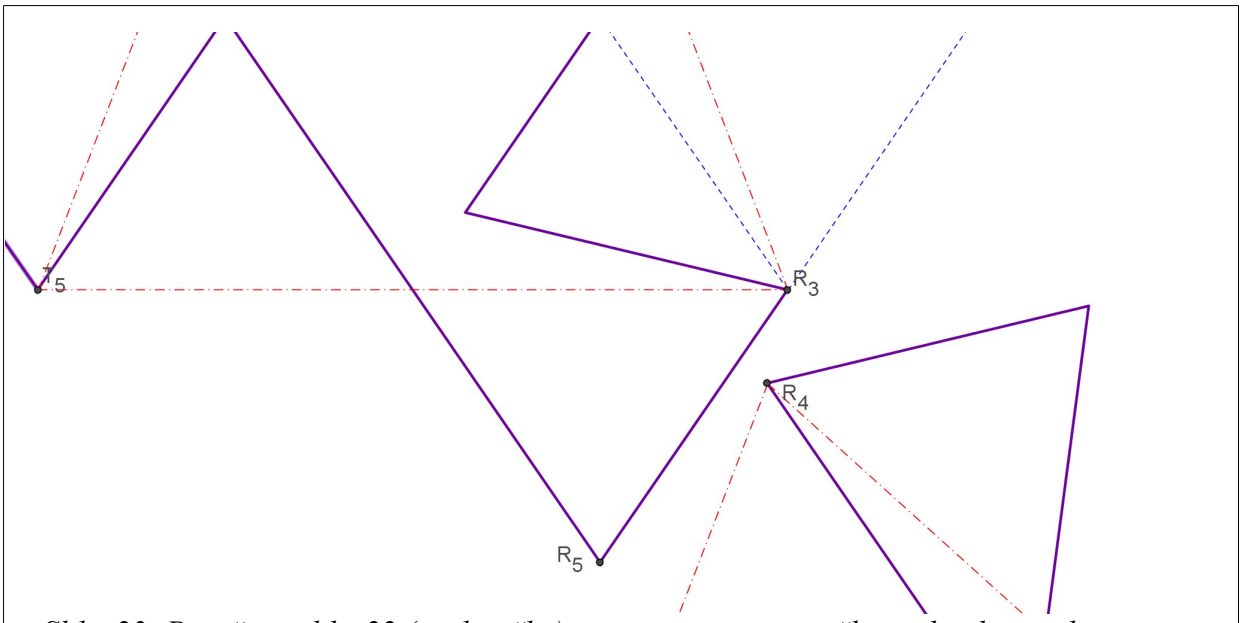
**Izvedba dokaza**: Na sliki 23 opazimo, da se bo v tem primeru točka $R_4$ (glej dokaz trditve 4) očitno bližala daljici $R_3 R_5$. Ordinato točke $R_4$ že poznamo, torej je za določitev dotikalnega kota treba natančno določiti še njeno absciso ter enačbo nosilke daljice $R_3 R_5$.

Na sliki 20 lahko vidimo, da je abscisa točke $R_4$ enaka $\frac{a}{2}-l(2)-l(3)\cos\varphi+l(4)\cos(\pi-2\varphi)$, kar z vstavljanjem ustreznih vrednosti in s poenostavitvijo zapišemo v obliki $a\frac{128\cos^4\varphi-22\cos^2\varphi+1}{256\cos^4\varphi}$.

Sedaj lahko zapišemo točko $R_4$ s koordinatami

$$R_4\left(a\frac{128\cos^4\varphi-22\cos^2\varphi+1}{256\cos^4\varphi}, a\frac{3\tan\varphi}{128\cos^2\varphi}\right).$$

Če si ogledamo sliko 23, opazimo, da nosilka daljice $R_3R_5$, imenujmo jo premica $q$, z daljico $T_5R_3$ zaradi sebipodobnosti fraktalne krivulje oklepa kot $\varphi$, torej je njen smerni koeficient enak $k_q=\tan\varphi$.




*Slika 23: Povečava slike 22 (iz okvirčka) z vrisanimi tistimi točkami, ki jih potrebujemo za dokaz trditve 5.*

Za točno določitev enačbe premice $q$ tako potrebujemo le še njeno začetno vrednost, $n_q$. To dobimo s pomočjo eksplicitne enačbe premice:

$$y=k_qx+n_q.$$

V to enačbo vstavimo ustrezna izraza za koordinati točke $R_3$ in iz nje izrazimo $n_q$

$$n_q=a\tan\varphi\frac{8\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi}-\tan\varphi\, a\frac{8\cos^2\varphi+3}{64\cos^2\varphi}$$

ter ga poenostavimo

$$n_q = -a\frac{\tan\varphi}{16\cos^2\varphi}\ .$$

Enačba premice $q$ je potem takšna:

$$y = x\tan\varphi - a\frac{\tan\varphi}{16\cos^2\varphi}$$

Da bo točka $R_4$ ležala na premici $q$, mora za njene koordinate veljati $y = k_q x + n_q$. Če v to enačbo vstavimo izraza za koordinati točke $R_4$, potem dobimo enačbo

$$a\frac{3\tan\varphi}{128\cos^2\varphi} = a\frac{128\cos^4\varphi - 22\cos^2\varphi + 1}{256\cos^4\varphi}\tan\varphi - a\frac{\tan\varphi}{16\cos^2\varphi}\ ,$$

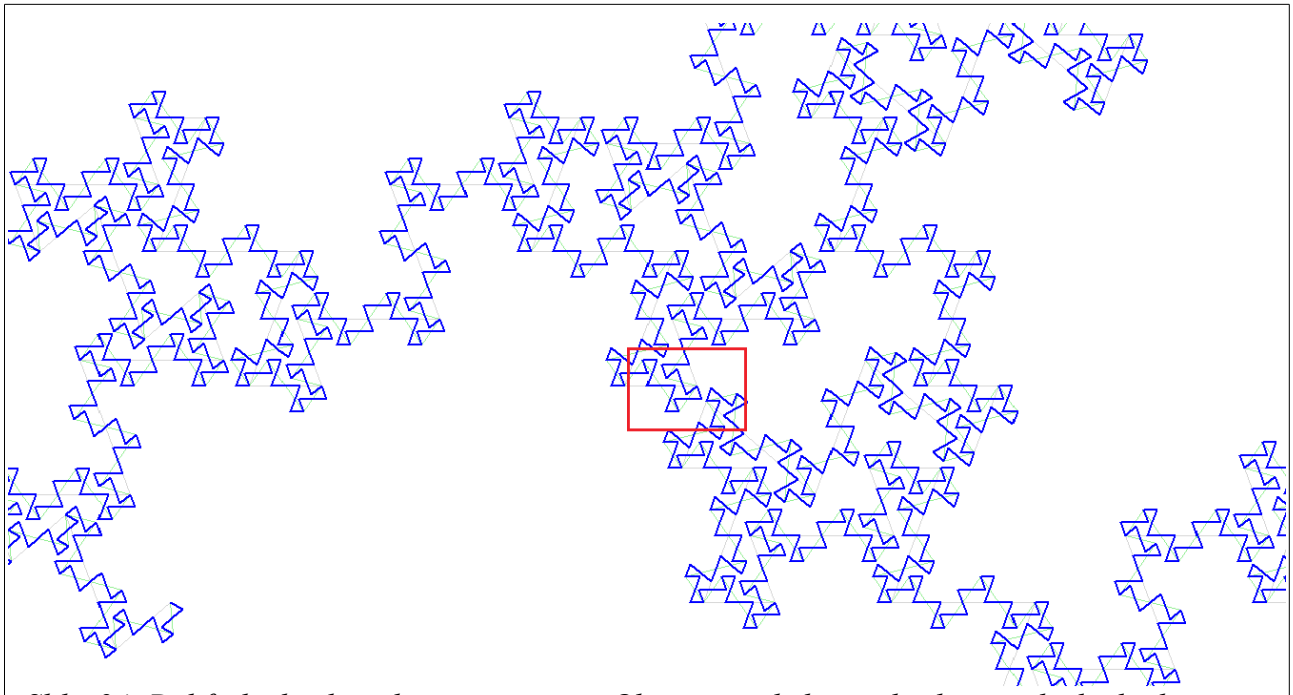
ki jo uredimo in delimo z $a\tan\varphi \neq 0$, da dobimo

$-\frac{128\cos^4\varphi - 44\cos^2\varphi + 1}{256\cos^4\varphi} = 0$. Če to enačbo rešimo, dobimo 4 rešitve za $\cos\varphi$. Nenegativni rešitvi sta $\cos\varphi_I = \frac{\sqrt{11-\sqrt{89}}}{8}$ in $\cos\varphi_{II} = \frac{\sqrt{\sqrt{89}+11}}{8}$. Ker pa je kot $\varphi_I$ večji od $\frac{\pi}{3}$ in tako ne leži v ustreznem intervalu, je edina možna rešitev in s tem dotikalni kot za fraktalno krivuljo »cik-cak« na peti stopnji enak $\varphi_5 = \arccos\frac{\sqrt{\sqrt{89}+11}}{8}$, kar je približno $\varphi_5 \approx 55{,}59427016°$. *q.e.d.*

## *4.5. Dotikalni kot krivulje »cik-cak« šestega nivoja*

**Trditev 6: Dotikalni kot krivulje »cik-cak« šestega nivoja je enak $\varphi_6 = \arccos\frac{\sqrt{\sqrt{35}+15}}{8}$.**

**Ideja dokaza:** Z opazovanjem »dogajanja« v okolici točke (v okvirčku na sliki 24), kjer se krivulja stakne sama s sabo, ugotovimo, da bo do dotikanja prišlo, ko bo točka $R_4$ ležala na daljici $R_3A_1$ (glej sliki 25 in 26). Princip dokaza je enak prejšnjemu.



*Slika 24: Del fraktalne krivulje šeste stopnje. Območje v okolici točke, kjer pride do dotikanja, je označeno z okvirčkom.*

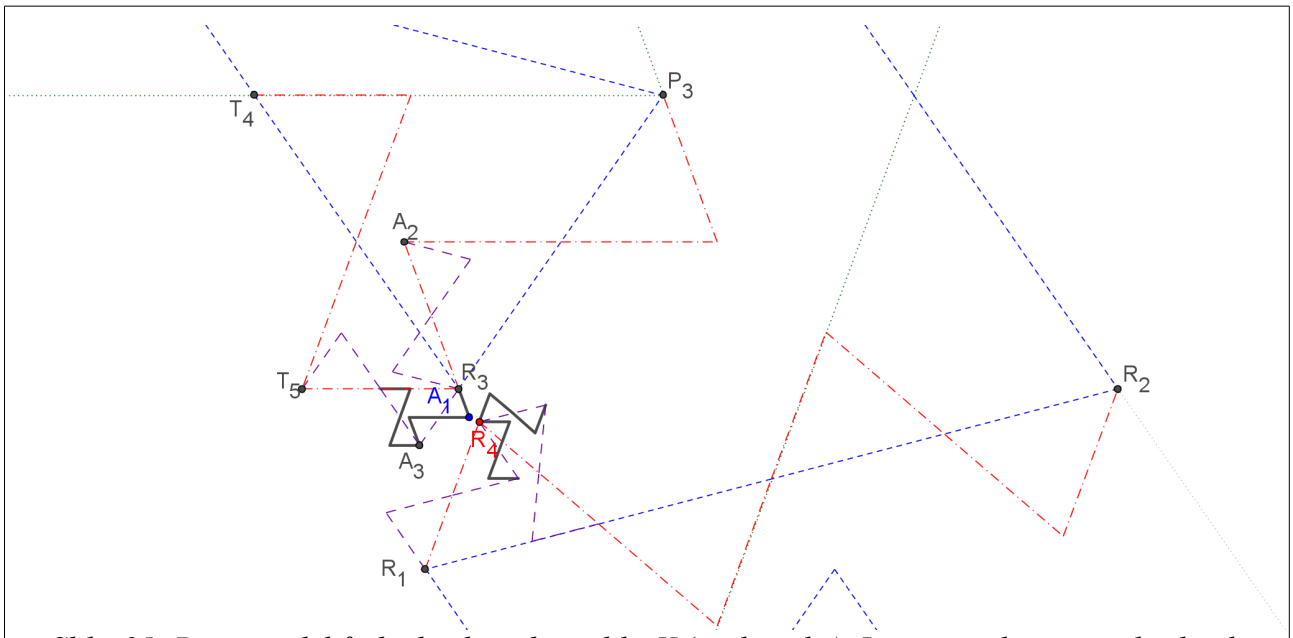
**Izvedba dokaza:** Na fraktalni krivulji šeste stopnje poleg točk $T_4, T_5, P_3, R_1, R_2, R_3, R_4$, ki so iste kakor pri prejšnjem dokazu, izberemo še točke $A_1, A_2$ in $A_3$ (njihova lega je lepo vidna na sliki 25).

Če naj točka $R_4$ leži na daljici $R_3 A_1$ (glej *idejo dokaza*), moramo najprej določiti enačbo premice nosilke te daljice, imenujmo jo $s$. To se najlažje stori s pomočjo določitve naklonskega kota premice. Kot $\angle T_4 R_3 A_2$ je enak $\pi - 3\varphi$, zato je kot $\angle T_5 R_3 A_2 = \pi - 3\varphi + \varphi = \pi - 2\varphi$. Njegov sokot pa je tako $2\varphi$, zato je smerni koeficient premice $s$ enak $k_s = \tan(2\varphi)$. Da to premico natanko določimo, potrebujemo še njeno začetno vrednost $n_s$, ki jo dobimo tako, da v enačbo $n_s = y - k_s x$ vstavimo koordinate točke $R_3$, ki so nam že znane od prej. Ko izraz še poenostavimo, dobimo

$$n_s = a \tan\varphi \frac{16\cos^2\varphi - 1}{64\cos^2\varphi\left(1 - 2\cos^2\varphi\right)}$$

in enačbo premice $s$

$$y = \tan(2\varphi)x + a\tan\varphi \frac{16\cos^2\varphi - 1}{64\cos^2\varphi\left(1 - 2\cos^2\varphi\right)}.$$




*Slika 25: Povečan del fraktalne krivulje s slike X (iz okvirčka). Lepo so vidne vse točke, ki jih potrebujemo za dokaz trditve 6.*

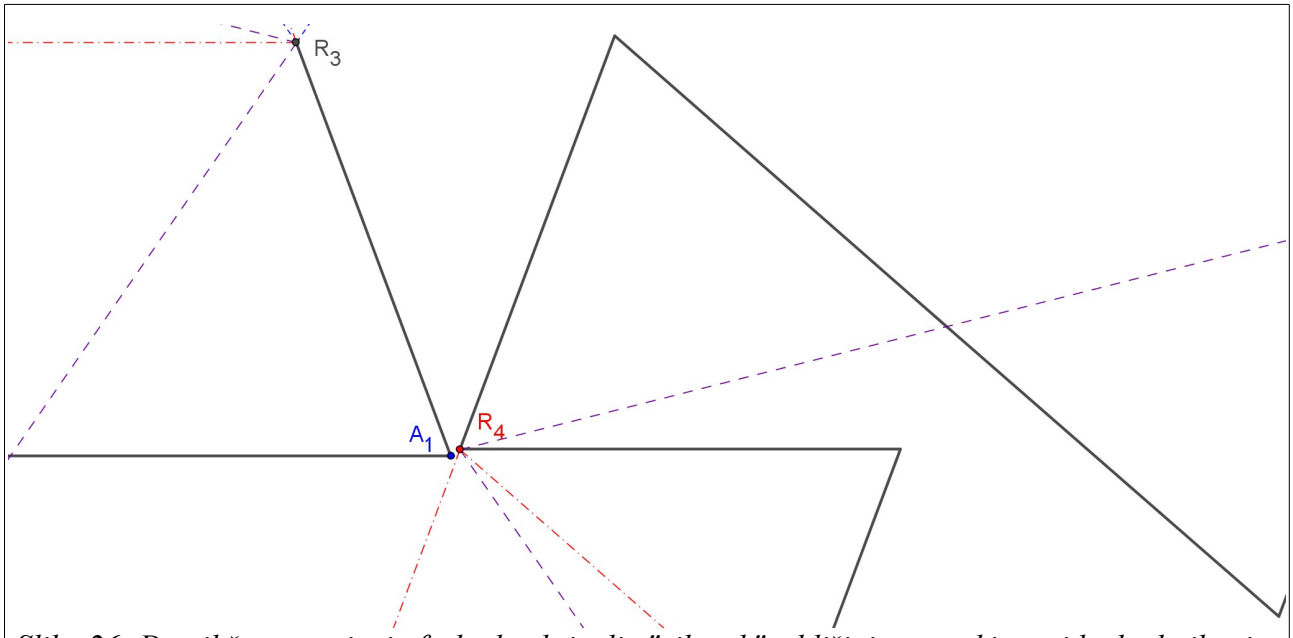
Da določimo kot, pri katerem pride do dotikanja, v dobljeno enačbo vstavimo koordinati točke $R_4$.

Dobimo enačbo

$$a\frac{3\tan\varphi}{128\cos^2\varphi}=\tan(2\varphi)\,a\frac{128\cos^4\varphi-22\cos^2\varphi+1}{256\cos^4\varphi}+a\tan\varphi\frac{16\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi(1-2\cos^2\varphi)},$$

ki jo poenostavimo v

$$a\tan\varphi\frac{64\cos^4\varphi-30\cos^2\varphi+3}{64\cos^2\varphi(1-2\cos^2\varphi)}=0\,.$$



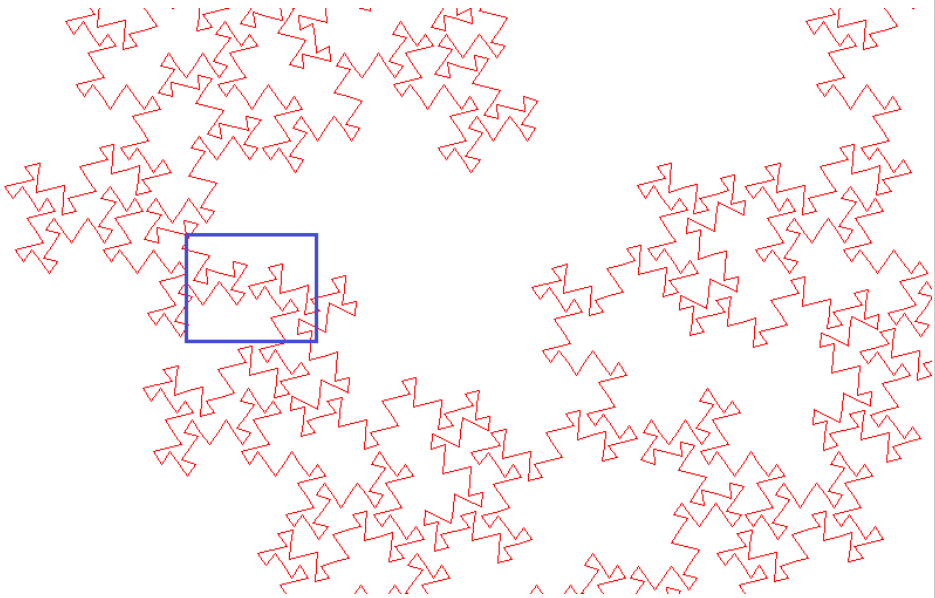

*Slika 26: Detajl šestega nivoja fraktalne krivulje "cik-cak" v bližini mesta, kjer pride do dotikanja.*

Vemo, da $a\tan\varphi\neq 0$. Enačba, ki jo moramo rešiti, je tako le enačba $64\cos^4\varphi-30\cos^2\varphi+3=0$. Uvedemo novo spremenljivko, $\cos\varphi=t$, in jo vstavimo v enačbo, da dobimo $64t^4-30t^2+3=0$. Pozitivni rešitvi te enačbe sta $t_1=\frac{\sqrt{15-\sqrt{35}}}{8}$ in $t_2=\frac{\sqrt{\sqrt{35}+15}}{8}$. Slednja je tudi ustrezna za rešitev našega problema. Torej je $\varphi_6=\arccos\frac{\sqrt{\sqrt{35}+15}}{8}$, kar je približno $\varphi_6\approx 55{,}29665708°$. *q.e.d.*

## 4.6. Dotikalni kot krivulje »cik-cak« sedmega nivoja

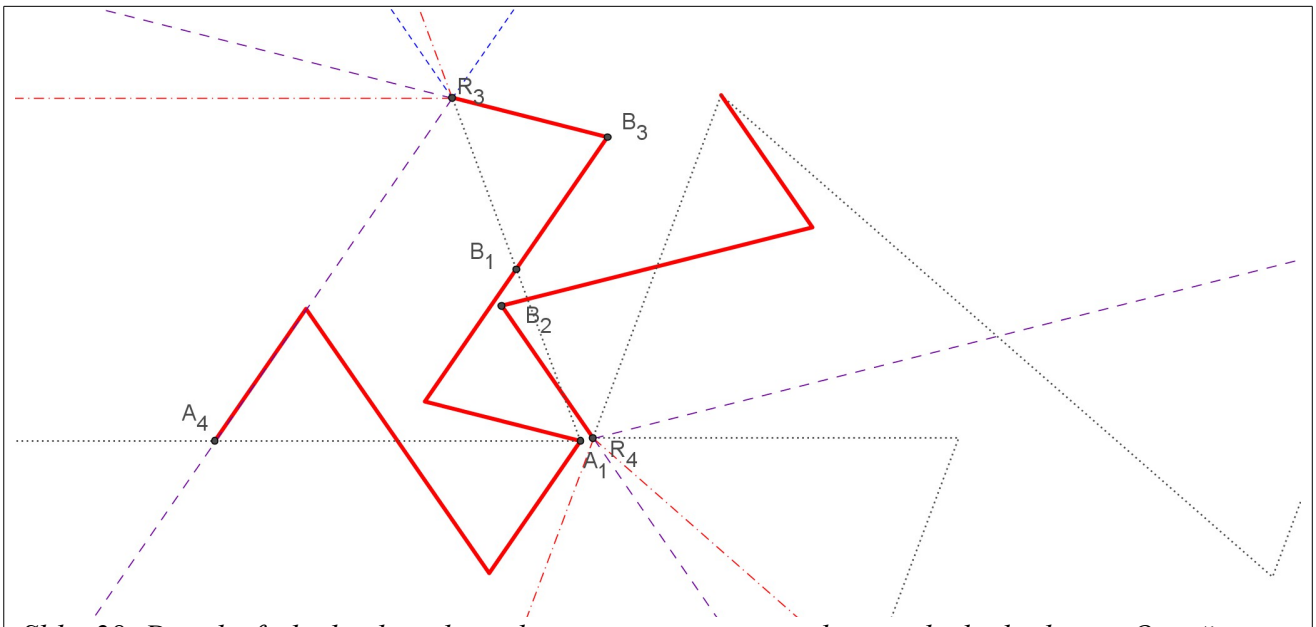
**Trditev 7:** ***Dotikalni kot krivulje »cik-cak« sedmega nivoja je enak***

$$\varphi_7=\arccos\frac{\sqrt{6\sqrt[3]{1151-36\sqrt{318}}+6\sqrt[3]{36\sqrt{318}+1151}+66}}{24}.$$



*Slika 27: Del fraktalne krivulje "cik-cak" na sedmem nivoju. Območje v neposredni okolici mesta, kjer pride do stikanja, se nahaja v okvirčku.*

**Ideja dokaza:** Z opazovanjem dogajanja v okolici točke (okvirček na sliki 27, za detajl glej sliko 28), kjer se krivulja stakne sama s sabo, ugotovimo, da bo do dotikanja prišlo, ko bo točka $B_2$ ležala na premici nosilki daljice $B_1B_3$. Princip dokaza je enak prejšnjemu.




*Slika 28: Detajl s fraktalne krivulje sedmega nivoja na mestu, kjer pride do dotikanja. Označene so točke, ki so omenjene pri dokazu trditve 7.*

**Izvedba dokaza**: Poleg točk $R_3, R_4$ in $A_1$, ki so iste, kot so bile pri dokazu trditve 6, izberemo še točke $B_1, B_2, B_3$ in $A_4$, ki so lepo vidne na sliki 28. Z nje je razvidno, da točka $B_1$ razpolavlja daljico $R_3 A_1$. Da natančno določimo točko $B_1$ in s tem premico nosilko daljice $B_1 B_3$, pa moramo še prej določiti koordinati točke $A_1$. Slednja je za $l(6)\cos(\pi-2\varphi)$ v desno in za $l(6)\sin(\pi-2\varphi)$ navzdol premaknjena točka $R_3$ (glej sliko 28 in dokaz trditve 6). Njene koordinate so tako

$$A_1\left(a\frac{8\cos^2\varphi+3}{64\cos^2\varphi}+l(6)\cos(\pi-2\varphi),\, a\tan\varphi\frac{8\cos^2\varphi-1}{64\cos^2\varphi}-l(6)\sin(\pi-2\varphi)\right)$$

oziroma poenostavljeno

$$A_1\left(a\frac{512\cos^6\varphi+192\cos^4\varphi-2\cos^2\varphi+1}{4096\cos^6\varphi},\, a\tan\varphi\frac{256\cos^4\varphi-32\cos^2\varphi-1}{2048\cos^4\varphi}\right).$$

Koordinate točke $B_1$ so zato

$$B_1\left(a\frac{1024\cos^6\varphi+384\cos^4\varphi-2\cos^2\varphi+1}{8192\cos^6\varphi},\, a\tan\varphi\frac{512\cos^4\varphi-64\cos^2\varphi-1}{4096\cos^4\varphi}\right).$$

Podobno dobimo koordinate točke $B_2$ - vzamemo točko $R_4$ in jo premaknemo za $s(7)\cos\varphi$ v levo in $s(7)\sin\varphi$ navzgor, to lahko zapišemo kot

$$B_2\left(a\frac{128\cos^4\varphi-22\cos^2\varphi+1}{256\cos^4\varphi}-s(7)\cos\varphi,\, a\frac{3\tan\varphi}{128\cos^2\varphi}+s(7)\cos\varphi\right)$$

in poenostavljeno

$$B_2\left(a\frac{8192\cos^6\varphi-1408\cos^4\varphi+64\cos^2\varphi-1}{16384\cos^6\varphi},\, a\tan\varphi\frac{384\cos^4\varphi+1}{16384\cos^6\varphi}\right).$$

Kot $\angle A_1A_4R_3$ je zaradi sebipodobnosti krivulje enak $\varphi$ (glej sliko 28). Iste velikosti pa sta tudi kota $\angle A_4R_3A_1$ in $\angle B_1R_3B_3$. Ker pa je kot $\angle R_3B_3B_1$ enak $\pi-2\varphi$, iz tega izhaja, da sta nosilki daljic $A_4R_3$ in $B_1B_3$ vzporedni, torej imata enak smerni koeficient. Vemo tudi, da je nosilka daljice $A_4A_1$ vzporedna z abscisno osjo. Iz tega sledi, da nosilka daljice $B_1B_3$, imenujmo jo $r'$, seka vodoravno os pod kotom $\varphi$. Njen smerni koeficient je zato $k_{r'}=\tan\varphi$.

Če vstavimo koordinate točke $B_1$ v enačbo $n_{r'}=y-k_{r'}x$, dobimo začetno vrednost enačbe premice $r'$:

$$n_{r'}=a\tan\varphi\frac{512\cos^4\varphi-64\cos^2\varphi-1}{4096\cos^4\varphi}-a\tan\varphi\frac{1024\cos^6\varphi+384\cos^4\varphi-2\cos^2\varphi+1}{8192\cos^6\varphi},$$

ki se poenostavi v $n_{r'}=-a\tan\varphi\frac{512\cos^4\varphi+1}{8192\cos^6\varphi}$. Enačba premice $r'$ je potem

$$y=x\tan\varphi-a\tan\varphi\frac{512\cos^4\varphi+1}{8192\cos^6\varphi}.$$

Da dobimo kot dotikanja $\varphi$, v to enačbo vstavimo koordinati točke $B_2$

$$a\tan\varphi\frac{384\cos^4\varphi+1}{16384\cos^6\varphi}=a\frac{8192\cos^6\varphi-1408\cos^4\varphi+64\cos^2\varphi-1}{16384\cos^6\varphi}\tan\varphi-a\tan\varphi\frac{512\cos^4\varphi+1}{8192\cos^6\varphi},$$

enačbo poenostavimo in uredimo

$$\frac{a\tan\varphi}{4096\cos^6\varphi}\cdot\left(2048\cos^6\varphi-704\cos^4\varphi+16\cos^2\varphi-1\right)=0.$$

Ker vemo, da $\frac{a\tan\varphi}{4096\cos^6\varphi}\neq 0$, je enačba, ki jo moramo rešiti, le enačba $2048\cos^6\varphi-704\cos^4\varphi+16\cos^2\varphi-1=0$. Uvedemo novo spremenljivko: $\cos\varphi=t$ in enačbo prevedemo v obliko $2048t^6-704t^4+16t^2-1=0$.

S pomočjo programa DERIVE sem poiskal rešitve. Edini dve realni rešitvi tega polinoma sta

$$t_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{6\sqrt[3]{1151-36\sqrt{318}}+6\sqrt[3]{36\sqrt{318}+1151}+66}}{24}.$$

Ker negativna rešitev ne pride v poštev, je edina ustrezna rešitev

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{6\sqrt[3]{1151-36\sqrt{318}}+6\sqrt[3]{36\sqrt{318}+1151}+66}}{24}$. Kot je tedaj enak

$\varphi_7=\arccos\frac{\sqrt{6\sqrt[3]{1151-36\sqrt{318}}+6\sqrt[3]{36\sqrt{318}+1151}+66}}{24}$, kar je približno $\varphi_7\approx 55{,}28633006\,°$. *q.e.d.*

## 4.7. Dotikalni kot limitne krivulje »cik-cak«

Rezultati računanja dotikalnih kotov posameznih nivojev zberimo v tabeli 1.

| Nivo | Natačna velikost dotikalnega kota | Velikost dotikalnega kota v stopinjah |
|---|---|---|
| 2 | $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$ | $\varphi_2=60\,°$ |
| 3 | $\varphi_3=\frac{\pi}{3}$ | $\varphi_3=60\,°$ |
| 4 | $\varphi_4=\arccos(\frac{\sqrt{5}}{4})$ | $\varphi_4\approx 56{,}01215641\,°$ |
| 5 | $\varphi_5=\arccos\frac{\sqrt{\sqrt{89}+11}}{8}$ | $\varphi_5\approx 55{,}59427016\,°$ |
| 6 | $\varphi_6=\arccos\frac{\sqrt{\sqrt{35}+15}}{8}$ | $\varphi_6\approx 55{,}29665708\,°$ |
| 7 | $\varphi_7=\arccos\frac{\sqrt{6\sqrt[3]{1151-36\sqrt{318}}+6\sqrt[3]{36\sqrt{318}+1151}+66}}{24}$ | $\varphi_7\approx 55{,}28633006\,°$ |
| $n$ | ? | ? |

*Tabela 1: Dotikalni koti posameznih nivojev*

Smisel tega računanja je bil (poleg konkretnih izračunov za posamezni nivo) tudi poiskati vzorec, poiskati splošni izraz za dotikalni kot nivoja $n$, da bi lahko poiskali dotikalni kot limitne »cik-cak« krivulje. Iz izračunov ne morem sklepati na splošno formulo. Verjetno obstaja kakšna druga metoda, na primer preko enačb spiral ali linearnih preslikav. Opazovanja pa kažejo, da obstaja dotikalni kot limitne krivulje. Zato sem sklenil, da ta kot navzdol ocenim, se pravi, da poiščem kot, od katerega je dotikalni kot gotovo večji.

**Ideja sklepa:** Če pogledamo sliko 28, vidimo, da sta od izračunanih točk točki $A_1$ in $B_2$ že prešli »ena preko druge« na sedmem nivoju. Poglejmo, za koliko lahko največ proti desni napreduje levi del krivulje. Ugotovimo, da je maksimalen doseg leve krivulje enak vsoti abscise točke $A_1$ in vseh krakov od vključno osmega dalje. Za enako razdaljo se bo tudi levi del krivulje pomaknil od točke $B_2$ maksimalno proti levi strani. Izračunal bom maksimalni odmik, ga upošteval pri abscisah točk $A_1$ ter $B_2$ in izenačil.

**Izvedba:** Maksimalni možni odmik od točke $A_1$ proti desni (ki je enak maksimalnemu odmiku od točke $B_2$ proti levi) označimo z *w*. Izračunamo ga z vsoto geometrijske vrste:

$$w=l(8)+l(9)+l(10)+\ldots=\frac{a}{(4\cos\varphi)^8}+\frac{a}{(4\cos\varphi)^9}+\frac{a}{(4\cos\varphi)^{10}}+\ldots=\frac{a}{(4\cos\varphi)^8}\left(1+\frac{1}{4\cos\varphi}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{a}{(4\cos\varphi)^8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4\cos\varphi}}=\frac{a}{16384\cos^7\varphi(4\cos\varphi-1)}$$

Ko izenačimo za *w* povečano absciso točke $A_1$ z za *w* zmanjšano absciso točke $B_2$, dobimo enačbo:

$$a\frac{512\cos^6\varphi+192\cos^4\varphi-2\cos^2\varphi+1}{4096\cos^4\varphi}+w=a\frac{8192\cos^6\varphi-1408\cos^4\varphi+64\cos^2\varphi-1}{16384\cos^6\varphi}-w$$

oziroma

$$a\frac{32768\cos^8\varphi-8192\cos^7\varphi-5632\cos^6\varphi+1408\cos^5\varphi+256\cos^4\varphi-64\cos^3\varphi-4\cos^2\varphi+\cos\varphi-1}{16384\cos^7\varphi(4\cos\varphi-1)}=$$
$$=a\frac{8192\cos^8\varphi-2048\cos^7\varphi+3072\cos^6\varphi-768\cos^5\varphi-32\cos^4\varphi+8\cos^3\varphi+16\cos^2\varphi-4\cos\varphi+1}{16384\cos^7\varphi(4\cos\varphi-1)}$$

Enačbo poenostavimo in dobimo:

$$a\frac{24576\cos^8\varphi-6144\cos^7\varphi-8704\cos^6\varphi+2176\cos^5\varphi+288\cos^4\varphi-72\cos^3\varphi-20\cos^2\varphi+5\cos\varphi-2}{16384\cos^7\varphi(4\cos\varphi-1)}=0$$

$$24576\cos^8\varphi-6144\cos^7\varphi-8704\cos^6\varphi+2176\cos^5\varphi+288\cos^4\varphi-72\cos^3\varphi-20\cos^2\varphi+5\cos\varphi-2=0$$

Uvedemo novo neznanko $\cos\varphi=t$ :

$$24576t^8-6144t^7-8704t^6+2176t^5+288t^4-72t^3-20t^2+5t-2=0\ .$$

Program DERIVE ni uspel poiskati natančne rešitve. Numerična metoda (vgrajena v program DERIVE 6) je dala rezultat *t*=0,5745786288.

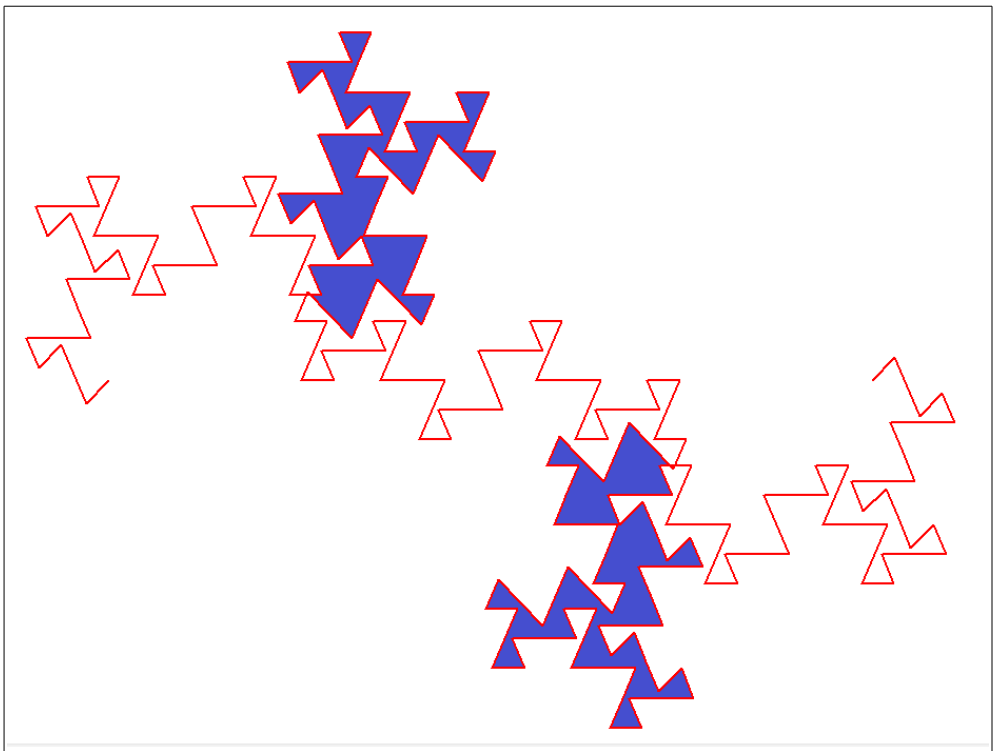
Iz enakosti $\cos\varphi \approx 0{,}5745786288$ dobimo $\varphi \approx 54{,}92987134°$. Sklepamo torej, da dotikalni kot limitne krivulje »cik-cak« ni manjši od kota $\varphi \approx 54{,}92987134°$.

## 5. ZAKLJUČKI

V nalogi sem si zastavil dva cilja, in sicer dokazati, da obstaja neskončno fraktalnih krivulj, ki imajo fraktalno dimenzijo sebipodobnosti enako racionalnemu številu ter izračunati dotikalne kote fraktalne krivulje »cik-cak«. Prvi cilj sem v celoti dosegel, saj sem dokazal, da obstaja neskončno fraktalnih krivulj, ki imajo fraktalno dimenzijo sebipodobnosti enako racionalnemu številu.

Izračunal sem dotikalne kote pri prvih sedmih nivojih fraktalne krivulje »cik-cak« in ocenil dotikalni kot limitne krivulje. Nerešen ostaja problem, kako izračunati dotikalni kot limitne krivulje »cik-cak«. To ostaja izziv za nadaljevanje naloge.

Pomislil sem tudi na možne uporabe obravnavane tematike. Krivulja »cik-cak« spominja na členjeno obalo. Dotikalni kot lahko vzamemo za situacijo, ko iz »zaliva« nastane »jezero« (primer na sliki 29). Ugotovil sem, da pri dovolj majhnem kotu (dotikalni kot limitne krivulje) ne bo nikoli prišlo do »zapore ožine«. V bistvu lahko gledamo na to tudi z vidika, da zelo majhna sprememba (v velikosti kota) povzroči kasneje veliko spremembo.



*Slika 29: Fraktalna krivulja "cik-cak" z "jezerci" (pobarvana polja).*

## 6. VIRI IN LITERATURA

[1] Bogomolny, A.: *Fractal Curves and Dimension,* 2014, [online], [citirano 10.11.2013]. Dostopno na spletnem naslovu:

http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/dimension.shtml

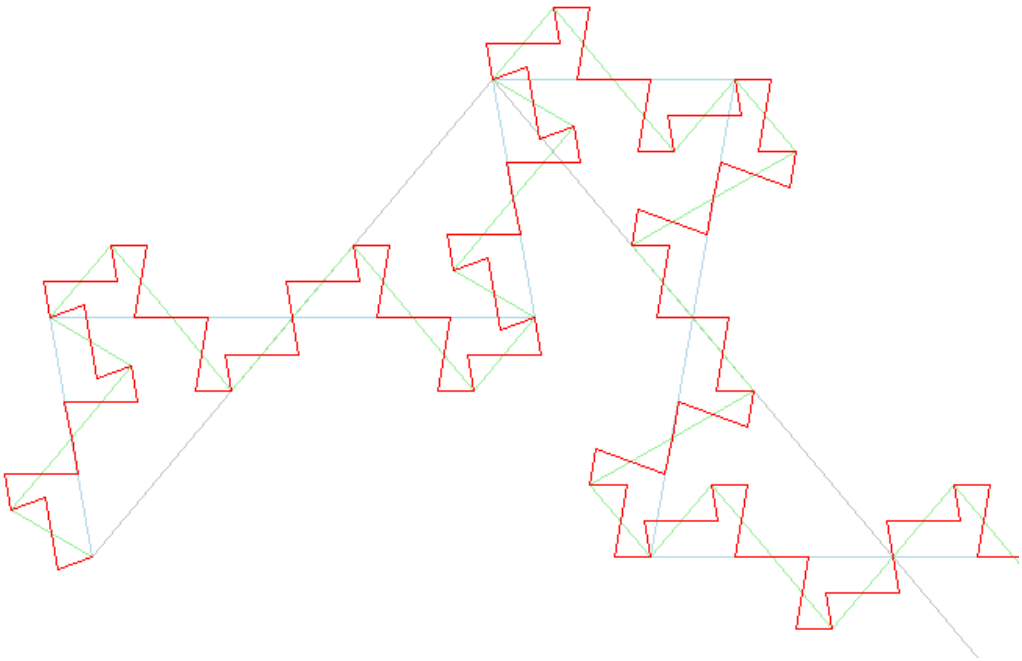
[2] Rubiano O,G.N., Jurčič Zlobec, B.: *Iteracije in fraktali.* Bogota, Ljubljana, 2013 [online], [citirano 15. 12. 2013]. Dostopno na spletnem naslovu: http://studentski.net/gradiva/ulj/fel/el1/numericne-metode.html?r=ulj_fel_el1_num_sno_fraktali_in_iteracije_01.pdf

[3] Zeitler, H., Pagon, D.: *Fraktale Geometrie – Eine Einfuhrung.* Springer F.W., Braunschweig/Wiesbaden, 2000.

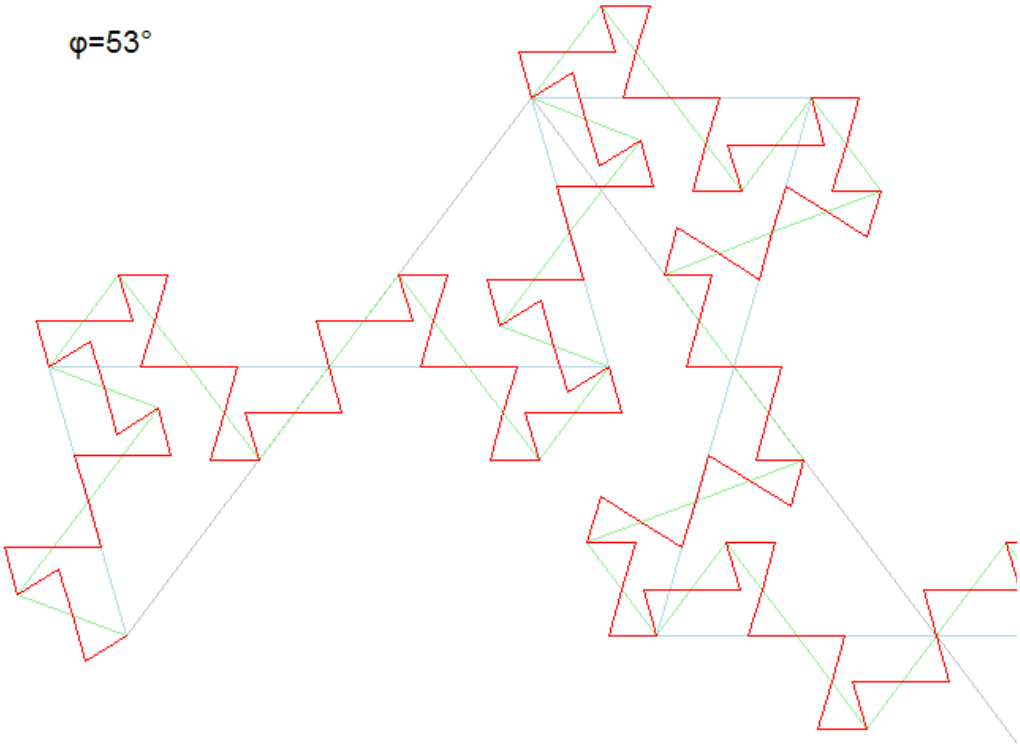
# 7. PRILOGE

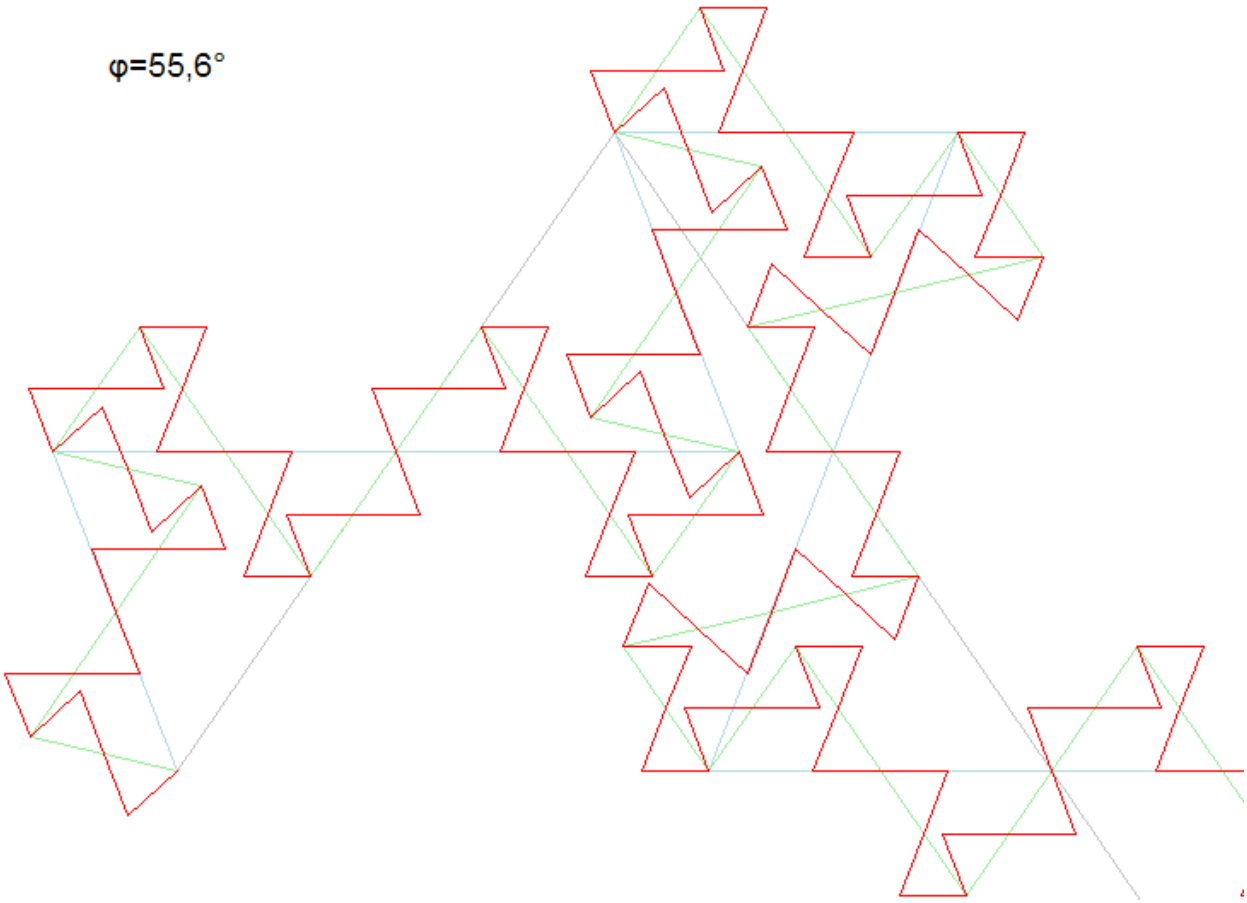
## *Priloga 1: Fraktalna krivulja »cik-cak« na četrtem nivoju*

φ=50°



φ=53°






Gornje slike so narisane za lažje razumevanje ideje dokaza trditve 4.