RAZISKOVALNA NALOGA

MNOŽENJE IN RAZSTAVLJANJE PITAGOREJSKIH TROJIC

Področje: ***matematika in logika***

Avtorja: Jan Križnič, Rok Miklavčič

Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

April, 2013

Škofijska gimnazija Vipava

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujeva profesorju Alojzu Grahorju za spodbude in nasvete pri izdelavi raziskovalne naloge ter profesorici Nataši Sever za pregled prevoda povzetka v angleščino.

POVZETEK

Pitagorejska trojica je trojica naravnih števil (x,y,z), ki ustrezajo enačbi $x^2 + y^2 = z^2$, na primer (3,4,5), (5,12,13), (6,8,10). Te trojice imenujemo *naravne pitagorejske trojice*. Definicijo lahko razširimo tako, da vzamemo v rešitvi za x in y tudi cela števila. Take trojice so na primer (-3,4,5), (5,-12,13),(-6,-8,10), pa tudi izrojene, na primer (0,5,5). Množico teh trojic imenujemo *cele pitagorejske trojice*. V množici celih pitagorejskih trojic definiramo množenje s predpisom $(a,b,c) \circ (p,r,s) = (ap-br, ar+bp, cs)$. V nalogi smo dokazali, da ima množica celih pitagorejskih trojic podobne lastnosti kot množica celih števil: veljata asociativnostni in komutativnostni zakon ter obstaja enota za množenje. Dokazali pa smo, da ne velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske trojice. Pri računanju s pitagorejskimi trojicami smo si pomagali s programi v programskem jeziku Python 2.7.

THE ABSTRACT

A Pythagorean triple consists of natural numbers (x,y,z), which comply with the equation $x^2 + y^2 = z^2$, as in examples, (3,4,5), (5,12,13), (6,8,10). These triplets are called *natural Pythagorean triples.* We can expand the definition so that x and y are presented by integers as well. Such triplets are, for example, (-3,4,5), (5,-12,13),(-6,-8,10), and also degenerate triples as (0, 5, 5). Such set of triples is called integer Pythagorean triplet. In the set of integer triplets, we define multiplying with the equation $(a,b,c) \circ (p,r,s) = (ap-br, ar+bp, cs)$. Our research paper proved that a set of integer Pythagorean triplet has similar properties as the set of integers: associative property and commutative property, and that a unit for multiplying exists. However, we proved that unique factorization theorem is not valid in this set. During our calculations, we worked with the computer program Python 2.7.

KAZALO

1 UVOD

V množici celih števil je definirano množenje. Za množenje veljata asociativnostni ter komutativnostni zakon. Obstaja enota za množenje, to je element 1. V množici celih števil definiramo deljivost in praštevila. Vemo, da lahko vsako pozitivno celo število (to je vsako naravno) število zapišemo na en sam način kot produkt praštevil.

Vse trojice naravnih števil, ki zadoščajo enačbi $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$**,** imenujemo množico naravnih pitagorejskih trojic (x,y,z). Ker bomo obravnavali take trojice, najprej opišemo nekaj načinov, kako jih generiramo. Če v rešitvi enačbe $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$ dopuščamo za prva dva elementa trojice (x,y,z) tudi cela števila, imenujemo tako trojico cela pitagorejska trojica. V množici celih pitagorejskih trojic definiramo množenje

$$(a,b,c) \circ (p,r,s) = (ap-br, ar+bp, cs).$$

in raziskujemo, ali veljajo enake lastnosti kot v množici celih števil. Na kratko rečeno, v nalogi primerjamo množici celih števil z običajnim množenjem in množico celih pitagorejskih trojic z množenjem, kot je definirano zgoraj.

2 CILJI NALOGE, HIPOTEZA IN METODE DELA

2. 1 CILJI NALOGE

Glavni cilj naloge je ugotoviti, ali ima množica celih pitagorejskih trojic podobne lastnosti kot množica celih števil: preveriti asociativnostni in komutativnostni zakon, ugotoviti obstoj enote za množenje, ugotoviti, katere pitagorejske trojice so nerazcepne ter preveriti, ali velja izrek o enoličnem razcepu poljubne trojice na nerazcepne pitagorejske trojice.

2. 2 HIPOTEZA

Množica celih pitagorejskih trojic z množenjem $(a,b,c) \circ (p,r,s) = (ap-br, ar+bp, cs)$ ima enake lastnosti kot množica celih števil z običajnim množenjem:

- velja asociativnostni zakon
- velja komutativnostni zakon
- obstaja enota za množenje
- velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske trojice, se pravi, da lahko vsako pitagorejsko trojico zapišemo na en sam način kot produkt nerazcepnih pitagorejskih trojic.

Hipoteza je postavljena na osnovi zapisa v knjigi avtorja Iana Stewarta (*Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities,* 2010) na strani 61, od koder se da sklepati, da imata omenjeni množici z danima operacijama enake lastnosti, vključno z izrekom o enoličnem razcepu na nerazcepne elemente. Prav tam je navedeno, da so nerazcepne tiste pitagorejske trojice, ki imajo praštevilsko hipotenuzo oblike 4n+1.

2. 3 METODA DELA

Uporabljali smo naslednje metode:

a) delo po strokovni literaturi in internetnih virih,
b) sklepanje z matematičnimi izpeljavami in dokazovanjem trditev,
c) z iskanjem primerov, proti primerov in vzorcev v veliki količini podatkov, ki smo jih generirali s pomočjo programskega jezika Python, ver. 2.7.

3 DEFINICIJA IN GENERIRANJE PITAGOREJSKIH TROJIC

3. 1 DEFINICIJA PITAGOREJSKIH TROJIC

Definicija 1: Pitagorejsko trojico imenujemo tri števila *x, y, z,* ki ustrezajo enačbi

(1) $$x^2 + y^2 = z^2$$

Pitagorejsko trojico zapišemo v obliki (x, y, z). Če so števila x, y, z naravna števila, imenujemo trojico (x, y, z) naravna pitagorejska trojica. Množico vseh naravnih pitagorejskih trojic označimo z $\boldsymbol{N_{pt}}$. Primeri naravnih pitagorejskih trojic: (119,120,169), (3367,3456,4852), (4601,4800,6649), (12709, 13500, 18541), (65,72,97), (319,360,481), (2291,2700,3514), (799,960,1249), (481,600,769), (4961,6480,8161),(45,60,75), (1679,2400,2929), (161,240,189), (1771,2700,3229), (56,90,106). Naštetih 15 naravnih pitagorejskih trojic je vzetih iz babilonske ploščice Plimpton 322, stare približno 3800 let (Robson, 2002)[1]. Ker naravna pitagorejska trojica predstavlja pravokotni trikotnik, običajno rečemo, da sta *x* in *y* kateti, *z* pa hipotenuza.

[1]Uveljavljena interpretacija tablico predstavlja kot seznam pitagorejskih trojic, generiranih na moderen način kot a = 2mn, b = $m^2 - n^2$, c = $m^2 + n^2$(m > n tuji si celi števili, različne parnosti), skupaj s $(\tan \alpha)^2$(in nekaj lahko razložljivimi napakami) (po Hladnik, 2013, stran 6).

3. 2 VEČKRATNIKI PITAGOREJSKIH TROJIC IN PRIMITIVNE PITAGOREJSKE TROJICE

Trditev 1: *Če je* $A = (a, b, c)$ *pitagorejska trojica, potem je tudi trojica* $k\alpha = k(a, b, c) = (ka, kb, kc), k \in N$ *pitagorejska trojica.*

Dokaz: Izračunajmo $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$. Upoštevali smo, da je (a, b, c) pitagorejska trojica.

Primer: $A = (3,4,5)$, $2A = (6,8,10)$, $15A = (45,60,75)$

Definicija 2: Če so v pitagorejski trojici (a, b, c) števila a, b, c paroma tuja, imenujemo takšno trojico *primitivna pitagorejska trojica*. Množico vseh primitivnih naravnih pitagorejskih trojic označimo s $\boldsymbol{P_{pt}}$. Večkratnike primitivnih trojic imenujemo tudi *neprimitivne pitagorejske trojice.*

Primer: Za neprimitivni pitagorejski trojici $(45,60,75)$ in (56,90,106) velja: $(45,60,75) = 15(3,4,5)$ in (56,90,106) = 2(28,45,53), kjer sta (3,4,5) ter (28,45,53) primitivni pitagorejski trojici.

Množico naravnih pitagorejskih trojic sestavljajo primitivne pitagorejske trojice in njihovi večkratniki, na primer $(3,4,5)$, $(6,8,10)$. Pitagorejskih trojic je torej neskončno mnogo.

Spoznali smo način, kako iz dane pitagorejske trojice dobimo nove pitagorejske trojice. V nadaljevanju bomo opisali še nekaj načinov generiranja pitagorejskih trojic. Zanimalo nas bo, ali obstaja način, po katerem lahko dobimo vse naravne pitagorejske trojice.

3. 3 PITAGOROVA METODA GENERIRANJA PITAGOREJSKIH TROJIC

Trditev 2: Naj bo *a>1* liho naravno število, $b = \frac{a^2-1}{2}$ in $c = \frac{a^2+1}{2}$. Tedaj je (*a,b,c*) naravna pitagorejska trojica (Posamentier, 2010, stran 130).

Dokaz: Ker je *a* liho naravno število, sta *b* in *c* naravni števili. Izračunajmo:

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4} = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

Primeri: $a = 3, b = 4, c = 5 \rightarrow$ (3,4,5)

$a = 5, b = 12, c = 13 \rightarrow$ (5,12,13)

$a = 33, b = 544, c = 545 \rightarrow$ (33, 544, 545).

Ker je $c - b = 1$, dobimo s to metodo samo tiste pitagorejske trojice, pri katerih se hipotenuza razlikuje od daljše katete za 1. Tako ne moremo generirati na primer trojice $a = 33, b = 56, c = 65 \rightarrow$ (33, 56, 65).

3. 4 PLATOVA METODA

Trditev 3: Naj bo a sodo naravno število. Potem je (a,b,c) naravna pitagorejska trojica, kjer sta $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$ in $c = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$. (Posamentier, 2010, stran 131).

Dokaz: Ker je a sodo število, sta b in c naravni števili. Izračunajmo:

$$a^2 + \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right)^2 = \frac{a^4 + 8a^2 + 16}{4} = \left(\frac{a^2 + 4}{4}\right)^2$$

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right)^2 = \frac{a^4 + 8a^2 + 16}{4} = \left(\frac{a^2 + 4}{4}\right)^2$$

Torej je res $a^2 + b^2 = c^2$.

Primeri: $a = 4, b = 3, c = 5 \rightarrow$ (4,3,5)

$a = 6, b = 8, c = 10 \rightarrow$ (6,8,10)

$a = 8, b = 15, c = 17 \rightarrow$ (8,15,17)

$a = 12, b = 35, c = 37 \rightarrow$ (12,35,37)

Število 12 je tudi kateta v pitagorejski trojici (5,12,13), zato po Platovi metodi ne moremo generirati vseh pitagorejskih trojic.

3. 5 METODA *PREDHODNIK – NASLEDNIKI*

Trditev 4: Če je (a,b,c) primitivna pitagorejska trojica, potem so trojice

A = (a – 2b + 2c, 2a – b +2c, 2a – 2b + 3c)

B = (a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c)

C = (-a + 2b + 2c, -2a + b + 2c, -2a + 2b + 3c)

tudi naravne pitagorejske trojice.

Dokaz: Dokažimo za pitagorejsko trojico A (za B in C gre dokaz podobno):

$$(a-2b+2c)^2+(2a-b+2c)^2=$$

$$=5a^2+5b^2+8c^2-8ab+12ac-12bc=$$

$$=5c^2+8c^2-8ab+12ac-12bc=$$

$$=13c^2-8ab+12ac-12bc$$

$$(2a-2b+3c)^2=$$

$$=4a^2+4b^2+9c^2-8ab+12ac-12bc=$$

$$13c^2-8ab+12ac-12bc$$

Če je (a,b,c) primitivna pitagorejska trojica, potem je tudi trojica A primitivna, saj je D(a-2b+2c,2a-b+2c,2a-2b+3c) = 1, ker je D(a,b,c) = 1 in D(1,2,3)=1. Podobno sklepamo tudi za trojici B in C.
V tem primeru se nismo poglabljali v raziskovanje, ali se da vsako primitivno pitagorejsko trojico dobiti na ta način. V navedeni literaturi tega dokaza ni. Sklepamo, da se iz začetne primitivne trojice (3,4,5) ne da dobiti vseh, zato bi bilo treba pokazati, ali obstaja neka množica predhodnikov, iz katerih bi kot nasledniki izšle vse ostale primitivne pitagorejske trojice.

Primer: Vzemimo začetno trojico (3,4,5). Potem je

(3,4,5) →A = (5,12,13), B = (21,20,29), C = (15,8,17).

Iz vsake izmed teh trojic dobimo nove tri trojice in tako naprej:

(5,12,13)→ (7,24,25), (55,48,73), (45,28,53)

(21,20,29) → (39,80,89), (119,120,169), (77,36,85)

(15,8,17) → (33,56,65), (65,72,97),(35,12,37)

3. 6 GENERIRANJE S POMOČJO ULOMKOV

Vzemimo zaporedje mešanih ulomkov, kjer so celi del ulomka in števec zaporedna naravna števila, imenovalec pa zaporedno liho število, začenši s 3:

$$1\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{5},\ 3\frac{3}{7},\ 4\frac{4}{9},\ 5\frac{5}{11},\ 6\frac{6}{13},\ 7\frac{7}{15},\ 8\frac{8}{17},\ \ldots,\ n\frac{n}{2n+1}.$$

Ko zapišemo te mešane ulomke kot ulomke, dobimo

$$\frac{4}{3},\ \frac{12}{5},\ \frac{24}{7},\ \frac{40}{9},\ \frac{60}{11},\ \frac{84}{13},\ \frac{112}{15},\ \frac{144}{17},\ \ldots,\ \frac{2n^2+2n}{2n+1}$$

Iz teh primerov sklepamo, da sta števec in imenovalec prva dva člena naravne pitagorejske trojice, zato oblikujemo trditev:

Trditev 5: V ulomku oblike $n\frac{n}{2n+1}$ oziroma $\frac{2n^2+2n}{2n+1}$, kjer je n naravno število, sta števec $x = 2n^2 + 2n$ in imenovalec $y = 2n + 1$ prva dva člena naravne pitagorejske trojice (x, y, z), kjer je $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Psamentier, 2010, str. 133)

Dokaz:

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2 =$$
$$= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 = (2n^2 + 2n + 1)^2$$

Trditev 5 lahko povemo tudi takole: Za vsako naravno število n je trojica

$$(2n+1,\ 2n^2 + 2n,\ 2n^2 + 2n + 1)$$

naravna pitagorejska trojica.
Opazimo, da se hipotenuza in daljša kateta vedno razlikujeta za 1. Tako so vse te trojice primitivne. Po tej metodi pa ne dobimo vseh pitagorejskih trojic.

Primeri: (3,4,5),(15,112,113), (119,7080,7081)

3. 7 FIBONACCIJEVA METODA GENERIRANJA PITAGOREJSKIH TROJIC

Leta 1225 je Fibonacci opisal v knjigi *Liber quadratorum* zaporedje lihih števil in vsoto končnega števila členov tega zaporedja (Posamentier, 2010, str. 125).

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$
$$\dots$$

V splošnem gre za vsoto prvih n lihih števil:

(2) $$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Formulo dokažemo z matematično indukcijo. Za n = 1 velja, saj je $1 = 1^2$.
Predpostavimo, da zveza velja za naravno število n. Potem je:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Ker velja zveza za naravno število 1 in ker smo iz predpostavke, da velja za naravno število n izpeljali, da velja tudi za naravno število n+1, velja potem za vsa naravna števila.

Trditev 6: S pomočjo formule (2) za vsoto vrste prvih n lihih naravnih števil lahko generiramo nekatere pitagorejske trojice.

Dokaz: Ko formulo $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ uporabimo na naslednjem koraku, dobimo:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Če je zadnji člen vrste na levi strani $2n + 1$ enak kvadratu nekega naravnega števila m, se pravi, da je $2n + 1 = m^2$, dobimo

$$n^2 + m^2 = (n + 1)^2, \text{ kjer je } 2n + 1 = m^2.$$

Naravno pitagorejsko trojico $(n, \sqrt{2n + 1}, n + 1)$ dobimo, ko je število 2n+1 kvadrat nekega naravnega števila.

Primeri: (4,3,5), (12,5,13), (24,7,25)

3. 8 GENERIRANJE PITAGOREJSKIH TROJIC Z DANO HIPOTENUZO

Če želimo generirati pitagorejske trojice z dano hipotenuzo, lahko v končno korakih preverimo vse možnosti, saj sta kateti manjši od hipotenuze. Ker je teh možnosti pri velikih hipotenuzah precej, smo si pomagali z računalniškim programom *GenerirajPTsHipotenuzo* v Pythonu 2.7 (*slika 1*).

```
from math import *

def GenerirajPTsHipotenuzo(c):

    # Program generira vse Pitagorejske trojice z dano hipotenuzo

    t1 = int(c)+1
    for a in range(t1):
        y = sqrt((float(c))**2 - (float(a))**2)
        if int(y) == y:
            b = int(y)
            print (a,b,c)
```

Slika 1: Program, ki izpiše vse pitagorejske trojice z dano hipotenuzo

Program poženemo pri dani hipotenuzi (*glej sliko 2*). Tako dobimo na primer:

```
>>> GenerirajPTsHipotenuzo(5)
(0, 5, 5)
(3, 4, 5)
(4, 3, 5)
(5, 0, 5)
>>> GenerirajPTsHipotenuzo(6)
(0, 6, 6)
(6, 0, 6)
>>> GenerirajPTsHipotenuzo(65)
(0, 65, 65)
(16, 63, 65)
(25, 60, 65)
(33, 56, 65)
(39, 52, 65)
(52, 39, 65)
(56, 33, 65)
(60, 25, 65)
(63, 16, 65)
(65, 0, 65)
>>>
```

Slika 2 : Primeri izpisov pitagorejskih trojic

Ker program poišče vse možnosti, izpiše tudi tiste trojice z eno kateto enako 0 in z zamenjanima katetama.

3. 9 EVKLIDOVA METODA GENERIRANJA PITAGOREJSKIH TROJIC IN BABILONSKA TABLICA Plimpton 322

Trditev 7: Naj bosta m in n naravni števili, m>n. Potem števila

(3) $$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

sestavljajo naravno pitagorejsko trojico. Primitivno pitagorejsko trojico dobimo, kadar sta m in tuji si števili različne parnosti. S formulami (3) dobimo vsako pitagorejsko trojico. (Vidav, 1972, str. 145-146).

Dokaz: Izračunajmo

$$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 =$$

$$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$$

Če sta m in n obe sodi ali obe lihi števili, dobimo neprimitivno pitagorejsko trojico. Torej morata biti m in n različne parnosti. Če m in n nista tuji si števili, potem tudi števila a, b in c niso tuja. Primitivno pitagorejsko trojico dobimo, ko sta m in n tuji si števili različne parnosti. Podroben dokaz je v Vidav, 1972, stran 145 in 146. Na istem mestu je tudi dokaz, da dobimo vsako primitivno pitagorejsko trojico s formulami (3) natanko takrat, ko sta m in n tuji celi števili različne parnosti. Ostale pitagorejske trojice so večktratniki primitivnih pitagorejskih trojic.

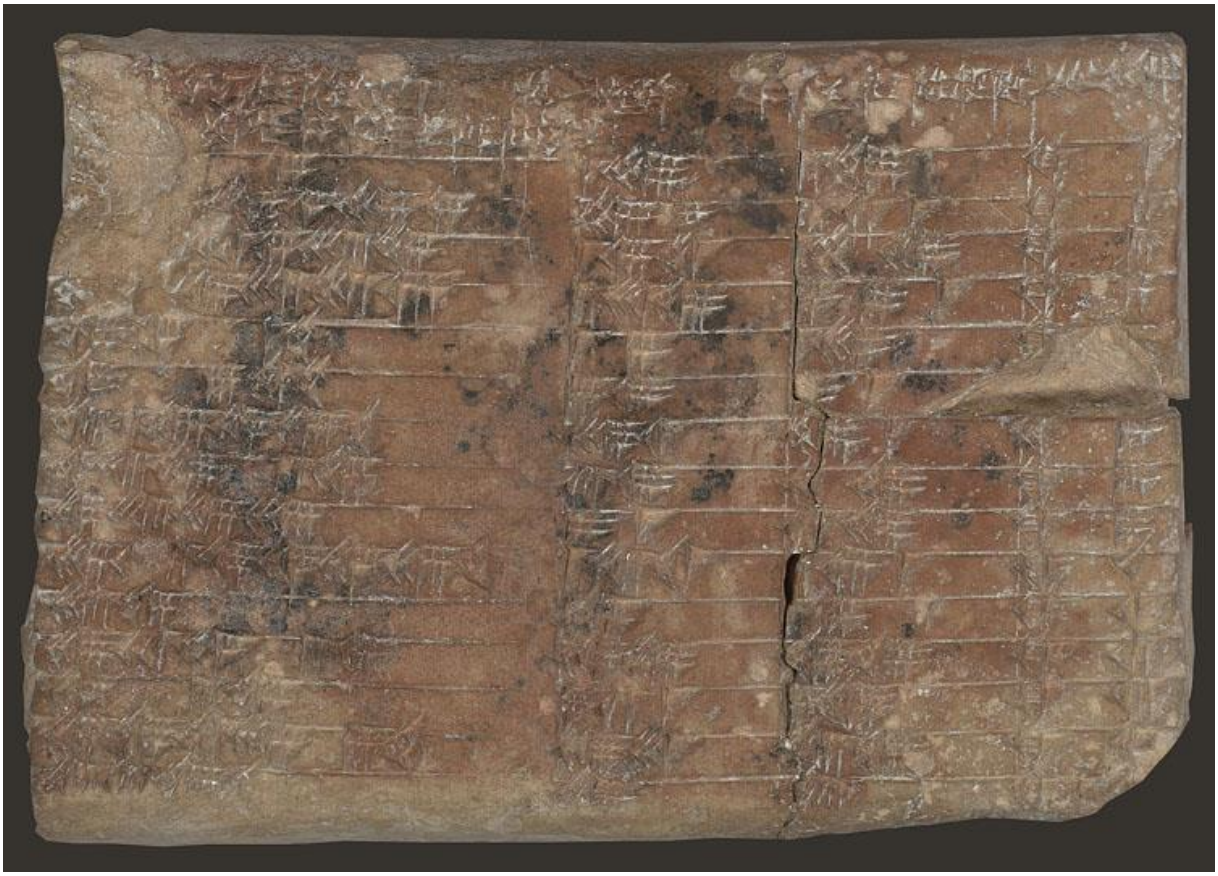
Primeri:

m = 2, n = 1 → (3, 4, 5) m = 3, n = 2 → (5, 12, 13)

m = 5, n = 2 → (21, 20, 29) m = 2013, n = 2012 → (4025, 8100312, 8100313)

Klinopisno glineno tablico Plimton 322 (*slika 3*) je ameriški publicist in zbiralec pridobil leta 1922 in jo kasneje podaril knjižnici univerze Columbia v New Yorku (Hladnik, 2012). Starost ploščice ocenjujejo na okrog 3800 let. Na njej so v štirih stolpcih zapisana števila. Otto Neugebauer (1899-1990) je vsebino interpretiral[2] s pitagorejskimi trojicami, generiranimi z Evklidovo metodo (Hladnik, 2013, stran 6). Po tej razlagi so to metodo poznali že stari Babilonci.

[2] E. Robson navaja tudi drugo, novejšo in precej drugačno interpretacijo (Robson, 2002).



Slika 3: Babilonska tablica Plimpton 322 (Larsa (Tell Senkereh), Irak, ca. 1820–1762 pr. Kr.)

(Vir: http://www.columbia.edu/cu/lweb/eresources/exhibitions/treasures/html/158.html)

Števila na tablici so zapisana v šestesetiškem sestavu. Drugi in tretji stolpec je Otto Neugebauer interpretiral kot kateto in hipotenuzo pravokotnega trikotnika. V *tabeli 1* smo v desetiškem zapisu podali vsebino prvega in tretjega stolpca (kateta a in hipotenuza c), dodali smo še kateto b. V originalu je 11 vrstica (45,75,60), kar je 15·(3,5,4). Če iz formul (3) izrazimo m in n, dobimo $m = \sqrt{\frac{a+c}{2}}$, $n = \frac{b}{2m} = \frac{b}{2\cdot\sqrt{\frac{a+c}{2}}}$.

Za vsako pitagorejsko trojico smo v tabeli dodali še ustrezna *m* in *n*, iz katerih bi lahko Babilonski matematiki izračunali pitagorejsko trojico.

Seveda se takoj zastavi vprašanje, zakaj in kako so izbrali ravno te pitagorejske trojice. Priredili smo razlago, ki jo navaja Robson (Robson, 2002). Če pogledamo števila m in n, ugotovimo, da so vsa večkratniki števil 2, 3 in 5, kar je razumljivo, saj je $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, osnova babilonskega številskega sestava pa je bilo število 60. Ko izračunamo kvociente $\frac{m}{n}$ za vsako vrstico posebej, dobimo padajoče zaporedje od $\frac{12}{5}$ do $\frac{9}{5}$. Tako smo dobili interpretacijo glede vrstnega reda zapisnih trojic (*glej tabelo 2*).

	a	**c**	b	m	n
1	**119**	**169**	120	12	5
2	**3367**	**4825**	3456	64	27
3	**4601**	**6649**	4800	75	32
4	**12709**	**18541**	13500	125	54
5	**65**	**97**	72	9	4
6	**319**	**481**	360	20	9
7	**2291**	**3541**	2700	54	25
8	**799**	**1249**	960	32	15
9	**481**	**769**	600	25	12
10	**4961**	**8161**	6480	81	40
11	**3**	**5**	4	2	1
12	**1679**	**2929**	2400	48	25
13	**161**	**289**	240	15	8
14	**1771**	**3229**	2700	50	27
15	**56**	**106**	90	9	5

Tabela 1: Interpretacija babilonske tablice Plimpton 322

Zastavimo si še vprašanje, ali je mogoče še kakšen kvocient, kjer sta števec in imenovalec sestavljena samo iz potenc števil 2,3 in 5 in je po velikosti med $\frac{12}{5}$ in $\frac{9}{5}$. Napisali smo kratek program v Pythonu (*Slika 4*). Predpostavili smo, da posamezna stopnja praštevilskega faktorja ne presega 10 (kar je verjetno že zelo visoka meja glede na to, da so Babilonci računali vse ročno). Program posamezni par izpiše večkrat, ker vsakič postavimo poleg 2, 3 in 5 tudi eno izmed osnov v števcu ali v imenovalci enako 1. Tako program poženemo šestkrat z naslednjimi vhodnimi podatki: (2,3,5,1), (3,5,2,1), (5,2,3,1), (1,2,3,5), (1,5,3,2) in (1,3,2,5).

```
def Plimpton322(a,b,c,d):
    t = 11
    for i in range(t):
        for j in range(t):
            for k in range(t):
                for l in range(t):
                    m = pow(a,i)*pow(b,j)
                    n = pow(c,k)*pow(d,l)
                    if (m <= 125) and (n <= 125):
                        x = float(m)/n
                        if (x <= 12.0/5) and (x >= 9.0/5):
                            print m,n
```

Slika 4: Program v Pythonu 2.7, ki izpiše možne pare m in n za tablico Plimpton 322

Dobili smo naslednje možne pare *(m, n)* (Opomba: Za izpis smo jih uredili po velikosti kvocientov m/n od največjega do najmanjšega.)

(12, 5), (64, 27), (75, 32), (125, 54), (9, 4), (20, 9), (54, 25), (32, 15), (25, 12), (81, 40),

(2, 1), (125, 64), (48, 25), (15, 8), (50, 27), (9,5).

Primerjava s pari (m,n) v *tabeli 1* pokaže, da smo dobili en par več, to je par (125, 64). To nam po Evklidovih formulah (3) da pitagorejsko trojico (11529, 16000, 19721). Domnevamo lahko, da so to trojico izpustili zaradi velikosti ali pa so jo v postopku računanja prezrli. V tabeli 2 je prikazana »popolna tablica Plimpton 322«.

	a	c	b	m	n	kvoc. m/n
1	**119**	**169**	120	12	5	2,40
2	**3367**	**4825**	3456	64	27	2,37
3	**4601**	**6649**	4800	75	32	2,34
4	**12709**	**18541**	13500	125	54	2,31
5	**65**	**97**	72	9	4	2,25
6	**319**	**481**	360	20	9	2,22
7	**2291**	**3541**	2700	54	25	2,16
8	**799**	**1249**	960	32	15	2,13
9	**481**	**769**	600	25	12	2,08
10	**4961**	**8161**	6480	81	40	2,03
11	**3**	**5**	4	2	1	2,00
11a	**11529**	**19721**	**16000**	**125**	**64**	**1,95**
12	**1679**	**2929**	2400	48	25	1,92
13	**161**	**289**	240	15	8	1,88
14	**1771**	**3229**	2700	50	27	1,85
15	**56**	**106**	90	9	5	1,80

Tabela 2: Tablica Plimpton 322 z vključeno »manjkajočo« vrstico

4 MNOŽENJE PITAGOREJSKIH TROJIC

4. 1 MNOŽICA CELIH PITAGOREJSKIH TROJIC

Najprej si oglejmo še eno izmed metod generiranja pitagorejskih trojic in sicer postopek, ko iz dveh danih pitagorejskih trojic dobimo novo pitagorejsko trojico (Stewart, 2010, str. 61)

Trditev 8: Naj bosta A = (a,b,c) ter B = (p,r,s) pitagorejski trojici. Potem je tudi trojica

(4) C =(ap-br, ar+bp, cs)

pitagorejska trojica.

Dokaz: Ker sta A in B pitagorejski trojici, velja $a^2 + b^2 = c^2$ in $p^2 + r^2 = s^2$. Izračunajmo

$$\begin{aligned}(ap - br)^2 + (ar + bp)^2 &= a^2p^2 - 2abpr + b^2r^2 + a^2r^2 + 2abpr + b^2p^2 = \\ &= a^2p^2 + b^2r^2 + a^2r^2 + b^2p^2 = \\ &= a^2(p^2 + r^2) + b^2(r^2 + p^2) = \\ &= a^2s^2 + b^2s^2 = (a^2 + b^2)\ s^2 = c^2s^2 = (cs)^2\end{aligned}$$

Primeri:

A = (3, 4, 5), B = (12, 5, 13) → C = (16, 63, 65)
A= (12, 5, 13), B = (63, 16, 65) → C =(676, 507, 845)
A = (676, 507, 845), B = (63, 16, 65) → C = (34476, 42757, 54925)
A = (3,4,5) B = (3,4,5) → C = (-7, 24, 25)
A = (3, 4, 5), B = (16, 63, 65) → C = (-204, 253, 325)
A = (3, 4, 5) B = (4, 3, 5) → C = (0, 25, 25)

Iz primerov je razvidno, da lahko dobimo po tej metodi iz dveh naravnih pitagorejskih trojic tudi trojice, ki imajo prvi člen negativen ali enak 0. Zato bomo množico pitagorejskih trojic razširili tudi na takšne rešitve enačbe (1), ki niso nujno naravna števila. Le tretji člen bomo vedno ohranili kot naravno število.

Definicija 2. Trojico števil (x, y, z), ki ustrezajo enačbi $x^2 + y^2 = z^2$, kjer sta x,y celi števili, z pa naravno število, imenujemo *cela pitagorejska trojica.* Množico celih pitagorejskih trojic označimo z $\boldsymbol{Z_{pt}}$. Posebej definiramo tudi trojico (0,0,0) kot celo pitagorejsko trojico.

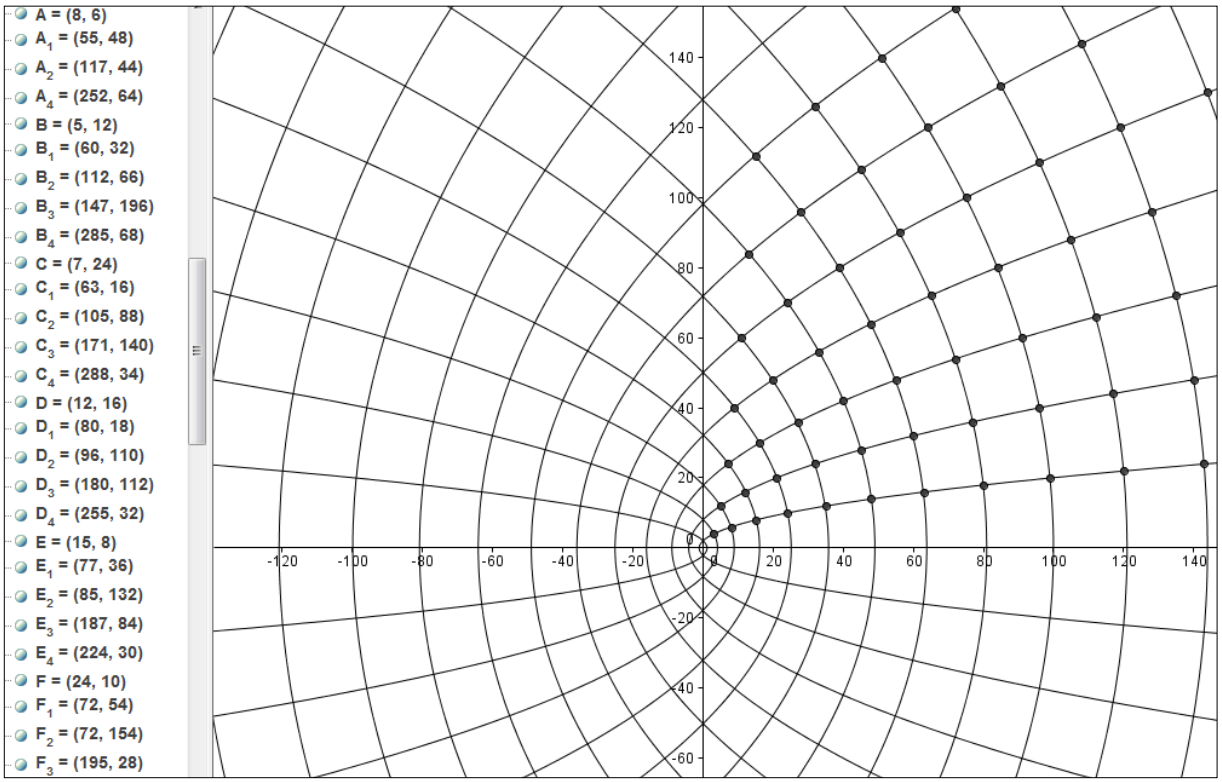
Cele pitagorejske trojice so na primer: $(-5,12,13)$, $(99,-20,101)$, $(217, 456, 505)$ $(-217,-456,505)$... Posebni primeri celih pitagorejskih trojic so tudi trojice, kjer je eno izmed števil x, y enako 0. Take trojice imenujemo izrojene pitagorejske trojice. Primeri izrojenih pitagorejskih trojic so: $(0,2,2)$, $(5,0,5)$, $(-16,0,16)$, $(0,0,0)$...

4. 2 GRAFIČNI PRIKAZ MNOŽICE CELIH PITAGOREJSKIH TROJIC

Če v pitagorejski trojici (x,y,z) opazujemo le prvi dve komponenti (z je z x in y določen), si predstavljamo vsako pitagorejsko trojico kot točko P(x,y) v ravnini (x,y). V Evklidovih formulah $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ označimo $x = a$ ter $y = b$. Tako dobimo: $x = m^2 - n^2$ ter $y = 2mn$. Iz druge enačbe izrazimo enkrat $m = \frac{y}{2n}$, drugič $n = \frac{y}{2m}$ in vstavimo v prvo enačbo ter dobimo

(5) $$x = \frac{y^2}{4n^2} - n^2 \quad \text{ter} \quad x = m^2 - \frac{y^2}{4m^2}$$

Tako dobimo družini parabol: pri izbranem n = 1,2,3,4,5, ... prve parabole oklepajo abscisno os, pri izbranem m = 1,2,3,4,5,... pa druge parabole ordinatno os. Cele pitagorejske trojice ležijo na presečiščih parabol (*slika 5*). Označenih je nekaj naravnih pitagorejskih trojic.



Slika 5: Prikaz celih pitagorejskih trojic v ravnini (program Geogebra)

4. 3 DEFINICIJA MNOŽENJA PITAGOREJSKIH TROJIC

Metodo generiranja nove pitagorejske trojice iz dveh danih pitagorejskih trojic uporabimo za definicijo množenja celih pitagorejskih trojic (Stewart, 2010, str. 61).

Definicija 3: V množico $\boldsymbol{Z}_{pt}$ celih pitagorejskih trojic vpeljemo operacijo množenja pitagorejskih trojic z definicijo

(5) $$(a,b,c) \circ (p,r,s) = (ap-br,\ ar+bp,\ cs)$$

Množenje pitagorejskih trojic bomo označili z znakom ∘.

Opomba: Če v pitagorejski trojici zamenjamo prva dva člena, dobimo kot rezultat množenja drugačno pitagorejsko trojico, na primer:

$$(3,4,5) \circ (3,4,5) = (-7, 24, 25)$$

$$(3, 4, 5) \circ (4, 3, 5) = (0, 25, 25)$$

$$(4, 3, 5) \circ (4, 3, 5) = (7, 24, 25).$$

Tako bomo seveda v množici celih pitagorejskih trojic **razlikovali med trojicama (a,b,c) ter (b,a,c)**. To je analogno kot točke v ravnini: točka A(a,b) je različna od točke B(b,a), kar je tudi prikazano na sliki v prejšnjem razdelku. Podobno imamo tudi pri kompleksnih številih, saj je število a + bi različno od števila b + ai.

Da smo si olajšali raziskovanje množenja pitagorejskih trojic, smo napisali program v programskem jeziku Python (verzija 2.7) (*glej sliko 6*):

```
def ZmnoziPT(a1,b1,c1,a2,b2,c2):

    # Program zmnozi Pitagorejski trojici (a1,b1,c1) in (a2,b2,c2)

    a = a1*a2 - b1*b2
    b = a1*b2 + a2*b1
    c = c1*c2
    print (a1,b1,c1),"o",(a2,b2,c2),"=",(a,b,c)
```

Slika 6: Program za množenje dveh pitagorejskih trojic

Trditev 9: Množenje celih pitagorejskih trojic, definirano s predpisom (5) je asociativno.

Dokaz: Množenje je definirano s predpisom (a,b,c) ∘ (p,r,s) = (ap-br, ar+bp, cs). Dokazati moramo veljavnost asociativnega zakona $(A\circ B)\circ C = A\circ(B\circ C)$ oziroma

$$((a,b,c)\circ(p,r,s))\circ(u,v,t) = (a,b,c)\circ((p,r,s)\circ(u,v,t))$$

Izračunajmo:

$$((a,b,c)\circ(p,r,s))\circ(u,v,t) = (ap-br, ar+bp, cs)\circ(u,v,t) =$$

$$= (apu - bru - arv - bpv, apv - brv + aru + bpu, cst)$$

$$(a,b,c)\circ((p,r,s)\circ(u,v,t)) = (a,b,c)\circ(pu-rv, pv+ru, st) =$$

$$= (apu - arv - bpv - bru, apv + aru + bpu - brv, cst)$$

Ker se oba rezultata ujemata, asociativnostni zakon velja.

Trditev 10: Množenje celih pitagorejskih trojic, definirano s predpisom (5) je komutativno.

Dokaz: Pokazati moramo, da velja A∘B = B∘A oziroma

$$(a,b,c)\circ(p,r,s) = (p,r,s)\circ(a,b,c)$$

Izračunajmo:

$$(a,b,c)\circ(p,r,s) = (ap - br, ar + bp, cs)$$

$$(p,r,s)\circ(a,b,c) = (pa - rb, pb + ra)$$

Ker je množenje celih števil komutativno, je komutativnostni zakon množenja (5) potrjen.

Trditev 11: V množici celih pitagorejskih trojic z množenjem (5) obstaja enota za tako definirano množenje.

Dokaz: Označimo enoto z $e = (e_1, e_2, e_3)$. Potem mora veljati:

$$e\circ(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}) = (\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})$$

$$(e_1, e_2, e_3)\circ(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}) = (\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})$$

$$(e_1 a - e_2 b, e_1 b + e_2 a, e_3 c)\circ(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}) = (\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})$$

Od tod sklepamo, da mora biti $e_3 = 1$, $e_2 = 0$ ter $e_1 = 1$. Tako smo dobili, da je enota za množenje pitagorejskih trojic enaka

(6) $$e = (1,0,1)$$

Vsako celo pitagorejsko trojico lahko zapišemo v obliki (a,b,c) = (1,0,1) $\circ$ (a, b, c). To velja seveda tudi za naravne pitagorejske trojice. Če naravna pitagorejska trojica (x,y,z) ni primitivna, imajo vsi členi skupen faktor, na primer k. Tedaj je:

(x,y,z) = (ka, kb, kc), kjer je (a,b,c) primitivna pitagorejska trojica. Tako dobimo:

(x,y,z) = k(a,b,c)= k(1,01) $\circ$(a,bc) = (k,0,k) $\circ$(a,b,c).

Izrojene pitagorejske trojice so večkratniki enote. Vsako neprimitivno pitagorejsko trojico lahko zapišemo kot produkt izrojene pitagorejske trojice in primitivne pitagorejske trojice, na primer: (6,8,10) = 2(3,4,5) = (2,0,2) $\circ$ $(3,4,5)$

Pravkar dokazane trditve dokazujejo, da ima množenje pitagorejskih trojic enake lastnosti kot množenje celih števil: obe operaciji sta notranji, asociativni in komutativni, v obeh primerih obstaja enota za množenje.

V nadaljevanju si bomo ogledali, ali veljajo podobne lastnosti tudi za razstavljanje celih pitagorejskih trojic kot veljajo za razstavljanje celih števil. Podobno kot se pri celih številih omejimo le na pozitivna cela števila (torej na naravna števila), se bomo tudi tukaj omejili na razstavljanje naravnih pitagorejskih trojic. Ker smo že pokazali, da je vsaka neprimitivna pitagorejska trojica večkratnik primitivne pitagorejske trojice, bo naša pozornost usmerjena v obravnavo primitivnih pitagorejskih trojic znotraj množice naravnih pitagorejskih trojic.

5 RAZSTAVLJANJE PITAGOREJSKIH TROJIC IN NERAZCEPNE PITAGOREJSKE TROJICE V MNOŽICI N_{pt}

5. 1 DELJIVOST IN RAZSTAVLJANJE NARAVNIH PITAGOREJSKIH TROJIC

Definicija 5: Primitivna pitagorejska trojica $(a, b, c) \in \boldsymbol{N_{pt}}$ je deljiva s primitivno pitagorejsko trojico (a_1, b_1, c_1), če obstaja takšna primitivna pitagorejska trojica (a_2, b_2, c_2) ali izrojena pitagorejska trojica, ki ni enota, da velja:

(6) (a,b,c)= (a_1, b_1, b_1) $\circ$ (a_2, b_2, c_2).

V tem primeru lahko rečemo, da smo naravno pitagorejsko trojico (a,b,c)razstavili na produkt dveh pitagorejskih trojic (a_1, b_1, b_1) in (a_2, b_2, c_2). Pitagorejski trojici (a_1, b_1, b_1) in (a_2, b_2, c_2)sta delitelja pitagorejske trojice (a,b,c). Da smo si olajšali iskanje, smo napisali program v Pythonu, ki hkrati generira in poišče vse delitelje pitagorejske trojice z dano hipotenuzo c (*slika 7* in *slika 8*).

```
def RazstaviPTsHipotenuzo(c):
    # Program generira vse Pitagorejske trojice z dano hipotenuzo in jih razcepi

    t1 = int(c)+1
    for a in range(t1):
        y = sqrt((float(c))**2 - (float(a))**2)
        if int(y) == y:
            b = int(y)

            t2 = int(sqrt(c))+1
            for k in range(1,t2):
                if c % k  == 0:
                    c1 = k
                    c2 = c/k
                    t3 = int(c1)+1
                    sezc1=[]
                    for a1 in range(t3):
                        y = sqrt((float(c1))**2 - (float(a1))**2)
                        if int(y) == y:
                            b1=int(y)
                            sez=[a1,b1,c1]
                            sezc1.append(sez)
                    t4 = int(c2)+1
                    sezc2=[]
                    for a2 in range(t4):
                        y = sqrt((float(c2))**2 - (float(a2))**2)
                        if int(y) == y:
                            b2=int(y)
                            sez=[a2,b2,c2]
                            sezc2.append(sez)
                    for i in range(len(sezc1)):
                        for j in range(len(sezc2)):
                            a1 = sezc1[i][0]
                            a2 = sezc2[j][0]
                            b1 = sezc1[i][1]
                            b2 = sezc2[j][1]
                            u = a1*a2 - b1*b2
                            v = a1*b2 + a2*b1
                            if (u == a) and (v == b):
                                print (u,v,c), "=", (a1,b1,c1), "o", (a2,b2,c2)
```

Slika 7: Program, ki generira in razstavi pitagorejske trojice s hipotenuzo c

a) **Primeri:**(16, 63, 65) je deljiva z: (3, 4, 5) in (12, 5, 13)
(0,25,25) je deljiva z: (5,0,5), (0,5,5), (3,4,5) in (4,3,5)

b) Kot že vemo, lahko vsako neprimitivno pitagorejsko trojico zapišemo kot večkratnik primitivne pitagorejske trojice:

(x,y,z) = (ka, kb, kc) = k(a,b,c) = (k,0,k) ∘(a,b,c), kjer je $(a, b, c) \in \boldsymbol{P}_{pt}$.

(25, 60, 65) = (5, 0, 5) ∘ (5, 12, 13), delitelja sta (5,0,5) in (5,12,13)

(39,52,65) je deljiva z: (13,0,13) in (3,4,5)

c) Primer razcepa na dva načina: z izrojeno in brez izrojene

(75, 100, 125) = (25, 0, 25)∘(3, 4, 5) = (4, 3, 5) ∘ (24, 7, 25)

```
>>> RazstaviPTsHipotenuzo(25)
(0, 25, 25) = (0, 1, 1) o (25, 0, 25)
(0, 25, 25) = (1, 0, 1) o (0, 25, 25)
(0, 25, 25) = (0, 5, 5) o (5, 0, 5)
(0, 25, 25) = (3, 4, 5) o (4, 3, 5)
(0, 25, 25) = (4, 3, 5) o (3, 4, 5)
(0, 25, 25) = (5, 0, 5) o (0, 5, 5)
(7, 24, 25) = (1, 0, 1) o (7, 24, 25)
(7, 24, 25) = (4, 3, 5) o (4, 3, 5)
(15, 20, 25) = (1, 0, 1) o (15, 20, 25)
(15, 20, 25) = (3, 4, 5) o (5, 0, 5)
(15, 20, 25) = (5, 0, 5) o (3, 4, 5)
(20, 15, 25) = (1, 0, 1) o (20, 15, 25)
(20, 15, 25) = (4, 3, 5) o (5, 0, 5)
(20, 15, 25) = (5, 0, 5) o (4, 3, 5)
(24, 7, 25) = (1, 0, 1) o (24, 7, 25)
(25, 0, 25) = (1, 0, 1) o (25, 0, 25)
(25, 0, 25) = (5, 0, 5) o (5, 0, 5)
```

```
>>> RazstaviPTsHipotenuzo(65)
(0, 65, 65) = (0, 1, 1) o (65, 0, 65)
(0, 65, 65) = (1, 0, 1) o (0, 65, 65)
(0, 65, 65) = (0, 5, 5) o (13, 0, 13)
(0, 65, 65) = (5, 0, 5) o (0, 13, 13)
(16, 63, 65) = (1, 0, 1) o (16, 63, 65)
(16, 63, 65) = (3, 4, 5) o (12, 5, 13)
(25, 60, 65) = (1, 0, 1) o (25, 60, 65)
(25, 60, 65) = (5, 0, 5) o (5, 12, 13)
(33, 56, 65) = (1, 0, 1) o (33, 56, 65)
(33, 56, 65) = (4, 3, 5) o (12, 5, 13)
(39, 52, 65) = (1, 0, 1) o (39, 52, 65)
(39, 52, 65) = (3, 4, 5) o (13, 0, 13)
(52, 39, 65) = (1, 0, 1) o (52, 39, 65)
(52, 39, 65) = (4, 3, 5) o (13, 0, 13)
(56, 33, 65) = (1, 0, 1) o (56, 33, 65)
(60, 25, 65) = (1, 0, 1) o (60, 25, 65)
(60, 25, 65) = (5, 0, 5) o (12, 5, 13)
(63, 16, 65) = (1, 0, 1) o (63, 16, 65)
(65, 0, 65) = (1, 0, 1) o (65, 0, 65)
(65, 0, 65) = (5, 0, 5) o (13, 0, 13)
>>>
```

Slika 8: Primeri izpisa vseh deliteljev pitagorejskih trojic s hipotenuzama 65 in 25

Za iskanje vseh razcepov pitagorejskih trojic smo napisali program (*glej sliko 9*).

```
from math import *

def PopolnomaRazstaviPT(a,b,c):
    # Program popolnoma razstavi dano Pitagorejsko trojico

    t1 = int(sqrt(c))+1
    for k in range(1,t1):
        if c % k  == 0:
            c1 = k
            c2 = c/k

            t2 = int(c1)+1
            sezc1=[]
            for a1 in range(t2):
                y = sqrt((float(c1))**2 - (float(a1))**2)
                if int(y) == y:
                    b1=int(y)
                    sez=[a1,b1,c1]
                    sezc1.append(sez)

            t3 = int(c2)+1
            sezc2=[]
            for a2 in range(t3):
                y = sqrt((float(c2))**2 - (float(a2))**2)
                if int(y) == y:
                    b2=int(y)
                    sez=[a2,b2,c2]
                    sezc2.append(sez)

            for i in range(len(sezc1)):
                for j in range(len(sezc2)):
                    a1 = sezc1[i][0]
                    a2 = sezc2[j][0]
                    b1 = sezc1[i][1]
                    b2 = sezc2[j][1]
                    u = a1*a2 - b1*b2
                    v = a1*b2 + a2*b1
                    if (u == a) and (v == b):
                        print (u,v,c), "=", (a1,b1,c1), "o", (a2,b2,c2)
                        if not(c2==c):
                            print "        "
                            PopolnomaRazstaviPT(a2,b2,c2)
```

Slika 9: Program v Pythonu, ki poišče vse naravne razcepe dane pitagorejske trojice

5. 2 NERAZCEPNE PRIMITIVNE PITAGOREJSKE TROJICE

V tem razdelku bomo obravnavali razstavljanje primitivnih pitagorejskih trojic. Gornji primer razcepa (16, 63, 65) = (3, 4, 5) o (12, 5, 13) kaže, da smo primitivno pitagorejsko trojico zapisali kot produkt dveh nerazcepnih pitagorejskih trojic. V nadaljevanju si bomo ogledali razstavljanje na nerazcepne pitagorejske trojice. Tukaj iščemo podobnost z razstavljanjem naravnih števil na praštevila.

Definicija 6: Primitivna pitagorejska trojica je nerazcepna, če je ne moremo zapisati kot produkt dveh drugih nerazcepnih primitivnih pitagorejskih trojic oziroma ko je deljiva samo sama s sabo in z enoto.

Opomba: Nerazcepne pitagorejske trojice imajo vlogo praštevil v množici celih števil ali vlogo nerazcepnih polinomov z realnimi koeficienti v R.

Trditev 12: V primitivni pitagorejski trojici je hipotenuza vedno oblike $c = 4k + 1$.

Dokaz: Glede na trditev 7 dobimo vsako primitivno pitagorejsko trojico po formulah (3), kjer sta m in n tuji si števili različne parnosti. Naj bo m sodo število in n liho število, torej: $m = 2i$ in $n = 2j - 1$. Potem je

$$c = m^2 + n^2 = (2i)^2 + (2j - 1)^2 = 4i^2 + 4j^2 - 4j + 1 = 4k + 1$$

Primeri nerazcepnih primitivnih pitagorejskih trojic (s programom *PopolnomaRazstaviPT* smo preizkusili vse možnosti).

```
>>> PopolnomaRazstaviPT(3,4,5)
(3, 4, 5) = (1, 0, 1) o (3, 4, 5)
>>> PopolnomaRazstaviPT(4,3,5)
(4, 3, 5) = (1, 0, 1) o (4, 3, 5)
>>> PopolnomaRazstaviPT(5,12,13)
(5, 12, 13) = (1, 0, 1) o (5, 12, 13)
>>> PopolnomaRazstaviPT(12,5,13)
(12, 5, 13) = (1, 0, 1) o (12, 5, 13)
>>> PopolnomaRazstaviPT(7,24,25)
(7, 24, 25) = (1, 0, 1) o (7, 24, 25)
(7, 24, 25) = (4, 3, 5) o (4, 3, 5)

(4, 3, 5) = (1, 0, 1) o (4, 3, 5)
>>> PopolnomaRazstaviPT(24,7,25)
(24, 7, 25) = (1, 0, 1) o (24, 7, 25)
>>> PopolnomaRazstaviPT(56,33,65)
(56, 33, 65) = (1, 0, 1) o (56, 33, 65)
>>> |
```

Slika 10: Primeri izpisa s programom s slike 9, ki popolnoma razstavi dano pitagorejsko trojico

Nerazcepne so na primer: (3,4,5), (4,3,5), (5,12,13), (12,5,13), (24,7,25), (56,33,65)

Opomba: Trojica (7,24,25) ni nerazcepna, saj je (7, 24, 25) =(4, 3, 5) ∘ (4, 3, 5)

5. 3 ALI VELJA IZREK O ENOLIČNEM RAZCEPU?

Trditev 13: V množici celih pitagorejskih trojic z množenjem (4) ne velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske trojice.

Dokaz: S programom *PopolnomaRazstaviPT*v Pythonu 2.7 smo poiskali primere razcepov na več nerazcepnih faktorjev.

a) Primeri razcepov na dva nerazcepna faktorja

(817,744,1105)=(4,3,5) ∘ (220,21,221)=(15,8,17) ∘ (63,16,65)
(576,943,1105)=(3,4,5) ∘ (220,21,221)=(15,8,17) ∘ (56,33,65)

b) Primeri razcepov na tri nerazcepne faktorje:

(264,1073,1105)=
(4,3,5) ∘ (171,140,221)=(5,12,13) ∘ (84,13,85)=(8,15,17) ∘ (63,16,65)

(784,2337,2465)=
(3,4,5) ∘ (468,155,493)=(8,15,17) ∘ (143,24,145)=(20,21,29) ∘ (77,36,85)

(897,2296,2465)=
(3,4,5) ∘ (475,132,493)=(8,15,17) ∘ (144,17,145)=(21,20,29) ∘ (77,36,85)

(125, 300, 325) =
= (3, 4, 5) ∘ (63, 16, 65) = (4, 3, 5) ∘ (56, 33, 65) = (5, 12, 13) ∘ (25, 0, 25)

c) Primer razcepa na pet nerazcepnih faktorjev:

(33604,69579,77285)=
=(3,4,5) ∘ (15168,2975,15457)
=(20,21,29) ∘ (2537,816,2665)
=(56,33,65) ∘ (989,600,1189)
=(143,24,145) ∘ (308,435,533)
=(156,133,205) ∘ (345,152,377)

Preverili smo in ugotovili, da je najmanjša (glede na velikost hipotenuze) primitivna pitagorejska trojica z razcepom na dva nerazcepna faktorja trojica (36, 323, 325):

(36,323,325)=(3,4,5) ∘ (56,33,65)=(5,12,13) ∘ (24,7,25)

5. 4 KATERE PRIMITIVNE PITAGOREJSKE TROJICE SO NERAZCEPNE?

5. 4. 1 Nerazcepne izrojene pitagorejske trojice

Če je pitagorejska trojica izrojena, to je oblike (c,0,c) ali (0,c,c), je nerazcepna natanko tedaj, ko je c praštevilo.

Če je c sestavljeno število, ga razcepimo na $c = c_1 \cdot c_2$. Potem je

$$(c,0,c) = (c_1,0,c_1)\circ(c_2,0,c_2) \text{ oziroma}$$
$$(0,c,c) = (0,c_1,c_1)\circ(c_2,0,c_2)=(c_1,0,c_1)\circ(0,c_2,c_2)$$

Če c_1 in c_2 nista praštevili, nadaljujemo z razcepom, dokler ne dobimo samih praštevil. Glede na prejšnje primere pa ni nujno, da je to edini razcep. Tako imamo na primer tudi razcepe izrojenih trojic na neizrojene trojice.

Primeri:

(65, 0, 65) = (5, 0, 5) o (13, 0, 13) edini možni razcep
(0, 65, 65) = (0, 5, 5) o (13, 0, 13) = (5, 0, 5) o (0, 13, 13)
(0, 25, 25) = (5, 0, 5) o (0, 5, 5) = (3, 4, 5) o (4, 3, 5) = (4, 3, 5) o (3, 4, 5)

5. 4. 2 Nerazcepne primitivne pitagorejske trojice

Glede na trditev 12 je v primitivni pitagorejski trojici hipotenuza vedno oblike $c = 4k + 1$. Od tod sklepamo, da so vse primitivne pitagorejske trojice s praštevilsko hipotenuzo oblike $c = 4k + 1$ nerazcepne. (Ostala praštevila ne morejo biti hipotenuze, razen pri izrojenih pitagorejskih trojicah). Praštevila do 101 oblike 4k+1 so: 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101.

Primeri: (3,4,5),(5,12,13), (20, 99, 101)

Vendar pa niso nerazcepne le tiste primitivne pitagorejske trojice, ki imajo praštevilsko hipotenuzo oblike $c = 4k + 1$. Našli smo primitivne pitagorejske trojice, pri katerih je hipotenuza sestavljeno število, pa so nerazcepne. Ker je produkt praštevil oblike 4k + 1 tudi oblike 4k+1 (namreč $(4i+1)\cdot(4j+1)=16ij+4j+4i+1=4k+1$), smo poskusili s hipotenuzami, ki so produkti teh praštevil. Med njimi so razcepne in nerazcepne primitivne pitagorejske trojice.

Primeri: (24,7,25), (56, 33, 65),(117, 44, 125), (120, 119, 169), (323, 36, 325), (1624, 57, 1625), (8004, 1397, 8125)

Med pitagorejskimi trojicami s hipotenuzo c = 221 = 13·17 sta dve neizrojeni, od katerih je ena nerazcepna, druga pa razcepna. V tem primeru je hipotenuza produkt dveh praštevil oblike 4k+1.

(21, 220, 221) = (12, 5, 13) o (8, 15, 17)

(171, 140, 221) je nerazcepna

Na osnovi teh primerov nismo postavili hipoteze o značilni lastnosti hipotenuze nerazcepne primitivne pitagorejske trojice oziroma, kako bi na osnovi razcepa hipotenuze sklepali na razcepnost oziroma nerazcepnost pitagorejske trojice s to hipotenuzo.

5. 5 TABELA RAZCEPOV NEKATERIH PITAGOREJSKIH TROJIC (PRIMITIVNIH IN NEPRIMITIVNIH)

V tabeli 3 smo zbrali nekaj razcepov pitagorejskih trojic, ki so po vrsti generirane z Evklidovo metodo. Upoštevali smo tudi zamenjavo v katetah.

m	n	Pitagorejska trojica	Razcep
2	1	(3, 4, 5)	Nerazcepna
2	1	(4, 3, 5)	Nerazcepna
3	1	(8, 6, 10)	2x (3, 4, 5)
3	1	(6, 8, 10)	2x (4, 3, 5)
3	2	(5, 12, 13)	Nerazcepna
3	2	(12, 5, 13)	Nerazcepna
4	1	(15,8,17)	Nerazcepna
4	1	(8, 15, 17)	Nerazcepna
4	2	(12, 16, 20)	4x (3, 4, 5)
4	2	(16, 12, 20)	2x (4, 3, 5)
4	3	(7, 24, 25)	(4, 3, 5)x(4, 3, 5)
4	3	(24, 7, 25)	Nerazcepna
5	1	(24, 10, 26)	2x (12,5,13)
5	1	(10, 24, 26)	2x (5,12,13)
5	2	(21, 20, 29)	Nerazcepna
5	2	(20, 21, 29)	Nerazcepna
5	3	(16, 30, 34)	2x (8,15,17)
5	3	(30, 16, 34)	2x (15,8,17)
5	4	(9, 40, 41)	Nerazcepna
5	4	(40, 9, 41)	Nerazcepna
6	1	(35, 12, 37)	Nerazcepna

Tabela 3: Razcepi nekaj prvih pitagorejskih trojic

6 RAZPRAVA IN ZAKLJUČEK

Cilj naloge je bil primerjati množico celih števil z običajnim množenjem z množico celih pitagorejskih trojic z množenjem (a,b,c) $\circ$ (p,r,s) = (ap-br, ar+bp, cs). Ugotovili in dokazali smo, da v množici celih pitagorejskih števil z množenjem $\circ$ veljata asociativnostni ter komutativnostni zakon in da obstaja enota. Prav tako na enak način vpeljemo relacijo deljivosti in pojem nerazcepne pitagorejske trojice. Nerazcepna naravna pitagorejska trojica ustreza pojmu praštevila med celimi pozitivnimi števili. V množici naravnih števil velja izrek o enoličnem razcepu na praštevila. V nalogi pa smo pokazali, da v množici naravnih pitagorejskih trojic ne velja ta zakon. Poiskali smo primere pitagorejskih trojic, ki so razcepni na več različnih načinov na nerazcepne pitagorejske trojice. To je tudi v nasprotju s trditvijo, navedeno v knjigi dr. Stewarta (Stewart, 2010, stran 61), da velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske trojice.

Naša hipoteza torej ni v celoti potrjena.

Naše ugotovitve pa so tudi v nasprotju s trditvijo dr. Stewarta (Stewart, 2010, stran 61), ki trdi, da so nerazcepne tiste izrojene pitagorejske trojice s praštevilsko hipotenuzo 2 ali oblike $c = 4k - 1$, za primitivne pa navaja le tiste s praštevilsko hipotenuzo oblike $c = 4k + 1$. V nalogi smo dokazali, da so nerazcepne vse izrojene pitagorejske trojice s katerokoli praštevilsko hipotenuzo, primitivne pa – poleg omenjenih – tudi takšne, ki nimajo hipotenuze s praštevilsko osnovo.

Z našimi ugotovitvami smo seznanili dr. Stewarta po elektronski pošti. Odgovoril nam je, da »kaže, da smo na pravi poti« in da bo svoje trditve preučil.

7 VIRI IN LITERATURA

[1] Hladnik, M.: ZGODOVINA MATEMATIKE, Zapiski predavanj Fakulteta za matematiko in fiziko Ljubljana, 2013. Dostopno na: http://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/ZGODMAT.pdf (15. 12. 2012).

[2] Hladnik, M.: *Babilonska matematika, Predavanja iz zgodovine matematike FMF*, Univerza v Ljubljani, 3. oktober 2012. Dostopno na http://www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/Babilon%28b%29.pdf (20. 12. 2012).

[3] Posamentier, A. S: *The Pythagorean Theorem*, 2010.

[4] Robson, E.; *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322, The American Mathematical Monthly*, Vol. 109, 2002, pp. 105–1 20. Dostopno na http://www.maa.org/news/monthly105-120.pdf (16. 12. 2012).

[5] Stewart, I.: *Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities,* 2010.

[6] Vidav, I.: *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.

[7] Osebna korespondenca po e-pošti z dr. Stewartom.