Škofijska gimnazija Vipava, Vipava

POSPLOŠITEV PITAGOROVEGA IZREKA V TRIRAZSEŽNEM IN ŠTIRIRAZSEŽNEM PROSTORU

RAZISKOVALNA NALOGA

Avtor: **Luka Kobal**

Področje: *matematika in logika*

Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Ajdovščina, april 2010

ZAHVALA

Zahvaljujem se svojemu profesorju Alojzu Grahorju za spodbude in nasvete pri izdelavi raziskovalne naloge.

KAZALO

POVZETEK

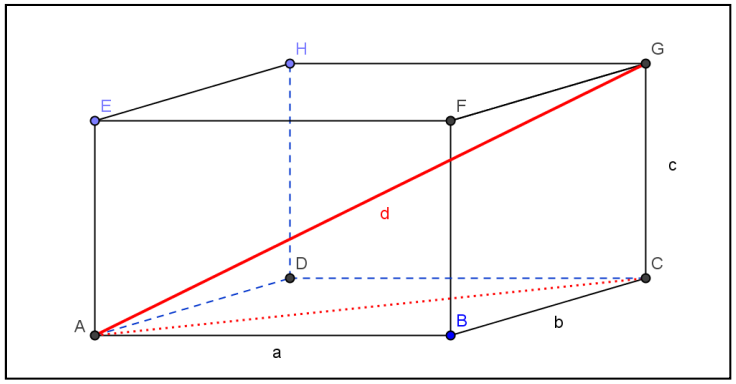
Znano je, da obstaja posplošitev Pitagorovega izreka v n-razsežnem evklidskem prostoru, vendar dokaz presega znanje srednješolske matematike. V pravokotnem trikotniku veljajo Pitagorov, Evklidov in višinski izrek. Osnovno raziskovalno vprašanje v nalogi je, ali obstajajo analogni izreki tudi v trirazsežnem evklidskem prostoru. Izkaže se, da popolne analogije ni. Tako kot obstaja več dokazov Pitagorovega izreka v pravokotnem trikotniku, lahko tudi posplošeni Pitagorov izrek v trirazsežnem prostoru dokažemo na več načinov. Zadnji cilj, ki smo si ga zastavili v nalogi, je poiskati in dokazati posplošitev Pitagorovega izreka v štirirazsežnem prostoru.

THE ABSTRACT

It is known that the generalization of the Pythagora's theorem in the n-dimensional Euclidean space does exist, but the proof exceeds the secondary school knowledge of Mathematics. Pythagora's, Euclid's and height theorems apply to a right angled triangle. The basic research question of this paper is whether analogue theorems exist in the three-dimensional Euclidean space , too. It turns out that there is no complete analogy. In addition to several proofs for Pythagora's theorem in a right angled triangle, a generalized Pythagora's theorem in a three-dimensional space can be proved in several ways. The last objective of this paper is to find and prove the generalization of the Pythagora's theorem in four-dimensional space.

1. UVOD

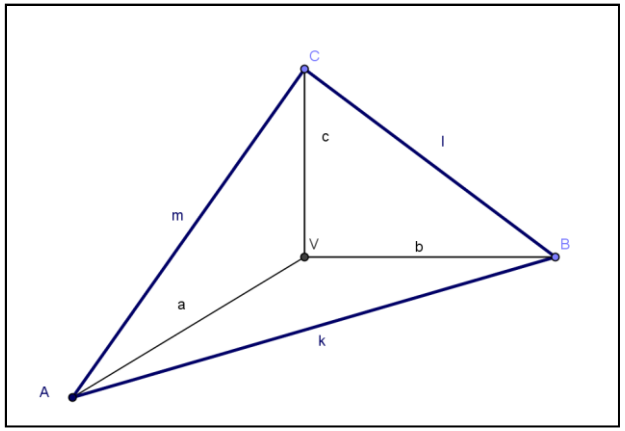
Slavni izrek Evklidske geometrije, ki ga imenujemo Pitagorov izrek (po mislecu Pitagori iz Samosa, 6. stoletje pred Kristusom), trdi: če je v ravninskem trikotniku eden izmed kotov pravi kot, potem je kvadrat dolžine stranice, ki leži nasproti pravega kota, enak vsoti kvadratov dolžin stranic, ki oblikujejo pravi kot. Izrek je bil poznan matematikom že pred Pitagoro. Znanih je vrsta dokazov tega izreka. Manj znane so posplošitve Pitagorovega izreka v večdimenzionalne evklidske prostore. Verjetno si pod posplošitvijo Pitagorovega izreka v trirazsežni Evklidski prostor večinoma predstavljamo formulo za izračun oddaljenosti točke *T(a,b,c)* od izhodišča oziroma trditev, da je kvadrat dolžine diagonale kvadra enak vsoti dolžin robov kvadra *(slika 1)* $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.



Slika 1: Kvader

V tem primeru ostajajo dimenzije elementov, ki jih kvadriramo, enake kot v primeru ravninskega trikotnika. V delu *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems* (Levi, 2009: 19) sem zasledil fizikalni dokaz posplošitve Pitagorovega izreka v trirazsežnem prostoru,

kjer so *a, b* in *c* v gornji formuli ploščine stranskih ploskev tristrane piramide s paroma pravokotnimi stranskimi ploskvami, *d* pa je ploščina osnovne ploskve.



Slika 2: Prisekani trirob[1]

Ta posplošitev Pitagorovega izreka v trirazsežni prostor (v nadaljevanju ga bomo najpogosteje imenovali *trirazsežni Pitagorov izrek*) se torej glasi[2]:

(1) $$(S_{VAB})^2 + (S_{VAC})^2 + (S_{VBC})^2 = (S_{ABC})^2$$

[1] V nadaljevanju bomo to telo imenovali Tristrana pravokotna piramida. Praktično ga dobimo na primer tako, da z ravnino odsekamo vogal kvadra.
[2] Lahko ga imenujemo tudi »ploščinski Pitagorov izrek«

Trditev sem nato dokazal s pomočjo Heronove formule za ploščino trikotnika (dokaz je v nadaljevanju naloge). Trditev (1) je dokazal že francoski matematik Jean Paul de Gua de Malves (1713—1785) in se po njem imenuje *de Guajev izrek* (glej vir [6]). Njegovega originalnega dokaza ne poznam, domnevam pa, da je uporabil Heronovo formulo za izračun ploščine osnovne ploskve S_{ABC} (*slika 2*). Sam sem si zastavil cilj to trditev dokazati še na kakšen drug način.

Prav tako sem v literaturi (Alvarez: 3) zasledil dokaz tele posplošitve Pitagorovega izreka v n-razsežnem prostoru:

(2) **Trditev:** ***Naj bo S ploščina osnovne ploskve in $S_1, S_2, \ldots S_n$ ploščine[3] paroma pravokotnih stranskih ploskev ortogonalnega n-simpleksa[4]. Potem velja:***

(3)
$$S^2 = S_1^{\ 2} + S_2^{\ 2} + \cdots + S_n^{\ 2}$$

Dokaz te trditve presega snov srednješolske matematike.

V nalogi sem si zastavil osnovno raziskovalno vprašanje, ali se da v trirazsežnem prostoru formulirati in dokazati tudi ostala dva izreka, ki sta analogna izrekom v ravninskem pravokotnem trikotniku (to sta Evklidov in višinski izrek). Dokazov teh izrekov v pregledani literaturi nisem zasledil.

V zadnjem razdelku naloge sem napravil posplošitev Pitagorovega izreka v štirirazsežnem prostoru, ki ga lahko imenujemo volumski Pitagorov izrek. To poimenovanje izhaja iz tega, da govorimo pri ravninskem trikotniku o vsoti kvadratov dolžin stranic, v trirazsežnem prostoru o vsoti

[3] Izraz »ploščina« je tu uporabljen v širšem smislu: v trikotniku je to dolžina, v piramidi je ploščina …

[4] n-simpleks je n-dimenzionalni geometrijski objekt, ki ga dobimo s posplošitvijo trikotnika oziroma tetraedra. Primer: trikotnik je 2-simpleks, tristrana piramida je 3-simplex. Ortogonalni n-simpleks ima n paroma pravokotnih robov s skupnim vrhom V (Wong, 2002: 1).

kvadratov ploščin trikotnikov, po analogiji bo v štirirazsežnem prostoru govora o vsoti kvadratov prostornin tristranih piramid. Tej posplošitvi pravimo tudi štirirazsežni Pitagorov izrek.

2. CILJI NALOGE IN METODE DELA

2.1 Cilj naloge

Namen naloge je preiskati posplošitve običajnega Pitagorovega izreka, ki velja v ravninskem pravokotnem trikotniku, v trirazsežnem in štirirazsežnem evklidskem prostoru. Zastavil sem si tri cilje.

Prvi cilj

Posplošitev Pitagorovega izreka v tridimenzionalni prostor obstaja in je dokazana. Moj cilj je to posplošitev dokazati na več načinov.

Drugi cilj

V ravninskem pravokotnem trikotniku veljajo poleg Pitagorovega izreka tudi Evklidov in višinski izrek. Zastavil sem si vprašanje, ali obstajata analogna izreka tudi v trirazsežnem prostoru (v tristrani piramidi, ki ima paroma pravokotne stranske ploskve oziroma pri kateri so stranski robovi paroma pravokotni). Oblikoval sem hipotezo:

Hipoteza: V tristrani piramidi, ki ima paroma pravokotne stranske robove, veljata izreka, ki sta analogna Evklidovemu in višinskemu izreku v ravninskem pravokotnem trikotniku.

Tretji cilj

Obstaja posplošitev in dokaz posplošitve Pitagorovega izreka v n-razsežnem prostoru, ki presega snov srednješolske matematike. Za cilj sem si postavil formulirati in dokazati posplošitev Pitagorovega izreka v štirirazsežnem prostoru s srednješolsko snovjo iz matematike.

2.2 Metode dela

Poleg običajne metode študija po literaturi in drugih virih sem v nalogi uporabil naslednji metodi:

- **sklepanje po analogiji in**
- **matematično dokazovanje trditev.**

Za poenostavljanje daljših matematičnih izrazov in za preiskovanje sem uporabljal program DERIVE 6.

Slike in simulacijo dokaza posplošitve Pitagorovega izreka v trirazsežnem prostoru sem risal s programom GeoGebra, prosto dostopnim na spletnem naslovu http://www.geogebra.org/cms/sl/download.

3. POSPLOŠITEV PITAGOROVEGA, EVKLIDOVEGA IN VIŠINSKEGA IZREKA V TRIRAZSEŽNEM PROSTORU

3.1 Trirazsežni Pitagorov izrek

Glede na uvodno poglavje se posplošitev Pitagorovega izreka v trirazsežnem prostoru se glasi

(4) Izrek: ***Za vsako tristrano piramido, omejeno s tremi medsebojno pravokotnimi ploskvami in četrto ploskvijo, ki ni vzporedna nobeni izmed pravokotnih treh, velja:***

$$(S_{VBC})^2 + (S_{VAC})^2 + (S_{VAB})^2 = (S_{ABC})^2,$$

kjer so S_{VBC}, S_{VAC}, S_{VAB} ploščine medsebojno pravokotnih trikotnikov, S_{ABC} pa ploščina četrte ploskve *(slika 2).*

Opomba:

V nadaljevanju bomo največ pozornosti posvetili »odsekanemu vogalu kvadra« (*slika 2*), to je telesu, opisanemu v izreku (4). Po analogiji s pravokotnim trikotnikom ga bomo imenovali *pravokotna tristrana piramida.*

Dokaz izreka (4):

Ploščino trikotnika *ABC* izračunamo po Heronovi formuli:

$$
\begin{aligned}
(S_{ABC})^2 &= \frac{k+l+m}{2}\left(\frac{k+l+m}{2}-l\right)\cdot\left(\frac{k+l+m}{2}-k\right)\cdot\left(\frac{k+l+m}{2}-m\right) = \\
&= \frac{k+l+m}{2}\left(\frac{k+l-m}{2}\right)\left(\frac{k+m-l}{2}\right)\left(\frac{l+m-k}{2}\right) = \\
&= \left(\frac{k^2+km-kl+kl+lm-l^2+mk+m^2-ml}{4}\right)\cdot\left(\frac{lk+l^2-lm+mk+lm-m^2-k^2-lk+mk}{4}\right) = \\
&= \left(\frac{k^2+m^2-l^2+2km}{4}\right)\cdot\left(\frac{l^2-m^2-k^2+2km}{4}\right) = \\
&= \frac{k^2l^2-k^2m^2-k^4+2k^3m+m^2l^2-m^4-k^2m^2+2km^3-l^4+l^2m^2+l^2k^2-2kml^2+2kml^2-2km^3-2k^3m+4k^2m^2}{16} = \\
&= \frac{-k^4-m^4-l^4+2l^2m^2+2k^2l^2-2k^2m^2+4k^2m^2}{16} = \\
&= \frac{-k^4-m^4-l^4+2l^2m^2+2k^2l^2+2k^2m^2}{16}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Stranice *k, l* in *m* izrazimo z *a, b* in *c* po Pitagorovem izreku:

$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{a^2+b^2} \\
l &= \sqrt{b^2+c^2} \\
m &= \sqrt{a^2+c^2}
\end{aligned}
$$

ter jih vstavimo v (5).

$$\frac{-(a^2+b^2)^2-(a^2+c^2)^2-(b^2+c^2)^2+2(b^2+c^2)(a^2+c^2)+2(a^2+b^2)(b^2+c^2)+2(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{16}=$$

$$=\frac{-a^4-b^4-2a^2b^2-a^4-c^4-2a^2c^2-b^4-c^4-2b^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2+2c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^4+2b^2c^2+2a^4+2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2}{16}=$$

$$=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2}{8}=$$

$$=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2}{8}=$$

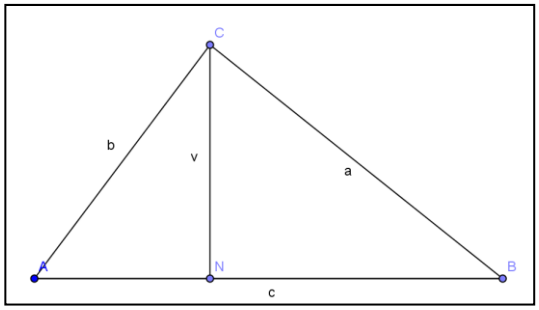
$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4}=$$

$$=(\frac{ab}{2})^2+(\frac{bc}{2})^2+(\frac{ac}{2})^2=(S_{VAB})^2+(S_{VBC})^2+(S_{VAC})^2,\quad q.e.d.$$

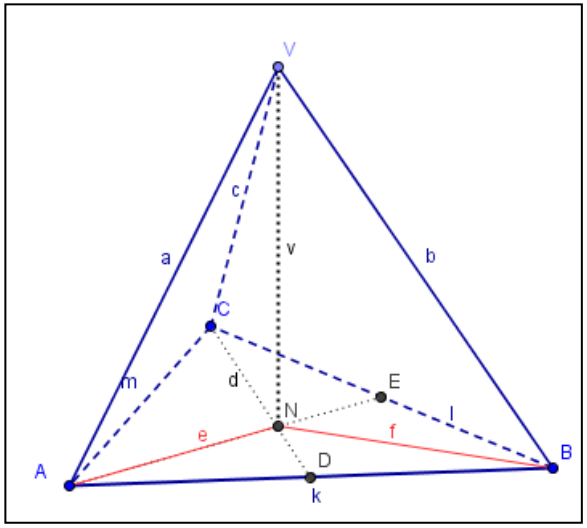
Ploščina osnovne ploskve pravokotne tristrane piramide je torej

(6) $$S_{ABC}=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4}}$$

3.2 Evklidov izrek v trirazsežnem prostoru



Slika 3: K Evklidovemu izreku v pravokotnem trikotniku



Slika 4: Pravokotna tristrana piramida

V dveh dimenzijah velja Evklidov izrek, ki pravi, da velja: $|AC|^2=|AN|.|AB|$ in $|BC|^2=|BN|.|AB|$ (*slika 3*). Posplošimo ga na trirazsežni prostor.

Na *sliki 4* je točka *V* vrh, kjer se stikajo tri medsebojno pravokotne ploskve oziroma trije med seboj paroma pravokotni robovi. Piramida na *sliki 4* je enaka tisti na *sliki 2*, le drugače je obrnjena. Ne glede na to, kako je piramida obrnjena, bomo v nadaljevanju imenovali ploskev, ki leži nasproti stičišču pravokotnih robov (to je trikotnik *ABC*), osnovna ploskev.

Po analogiji s pravokotnim trikotnikom predpostavimo

(7) $(S_{VAB})^2 = S_{ABN} \cdot S_{ABC}$

Dokaz predpostavke (7)

Tako kot v 3.1 s pomočjo Heronove formule izpeljemo izraz za ploščino trikotnika *ABN*. Delo si olajšamo, če uporabimo formulo (6) in namesto c^2 vstavimo $-v^2$, saj je $e^2 = a^2 - v^2$, $f^2 = b^2 - v^2$ in $k^2 = a^2 + b^2$

(8) $$S_{ABN}^2 = \frac{a^2b^2 - a^2v^2 - b^2v^2}{4}$$

Izraz za višino dobimo iz volumna *V* piramide:

$$V = S_{ABC} \cdot \frac{v}{3} \qquad V = \frac{ac}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{acb}{6}$$

$$S_{ABC} \cdot \frac{v}{3} = \frac{acb}{6}$$

$$\frac{abc}{2} = S_{ABC} \cdot v$$

$$v^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4(S_{ABC})^2}$$

Ko uporabimo (6), dobimo

(9) $$v^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$$

Desno stran predpostavke (7) kvadriramo in izračunamo:

$(S_{ABN})^2 \cdot (S_{ABC})^2 =$

$$= \frac{a^2b^2 - (a^2+b^2)\cdot\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}{4} \cdot \frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4} =$$

$$= \frac{a^4b^4 + a^2b^4c^2 + a^4b^2c^2 - (a^2+b^2)\cdot a^2b^2c^2}{16} =$$

$$= \frac{a^4b^4 + a^2b^4c^2 + a^4b^2c^2 - a^4b^2c^2 - a^2b^4c^2}{16} =$$

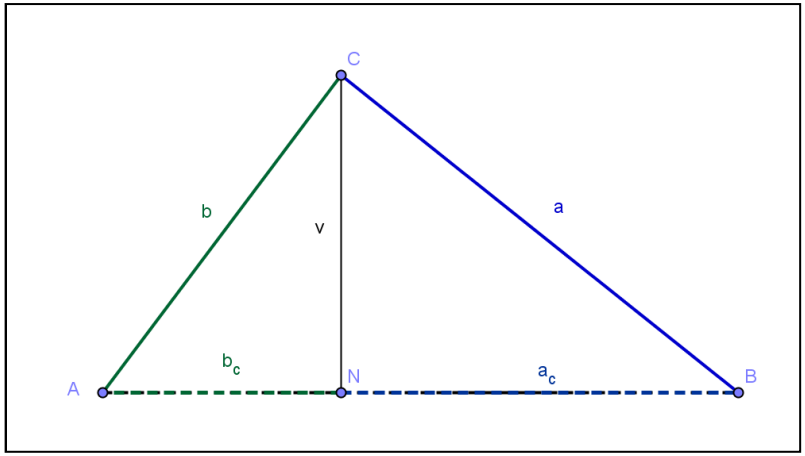
$$= \frac{a^4b^4}{16} = (\frac{ab}{2})^4, \quad q.e.d.$$

Opomba: Izpeljava trirazsežnega Evklidovega izreka s programom DERIVE 6 je v *prilogi 1*.

Posplošitev Evklidovega izreka velja, saj je $S_{VAB} = \frac{ab}{2}$, torej

(10) **Izrek (trirazsežni Evklidov izrek): V pravokotni tristrani piramidi je kvadrat ploščine stranske ploskve enak produktu ploščine pravokotne projekcije te stranske ploskve na osnovno ploskev in ploščine osnovne ploskve.**

3.3 Višinski izrek v trirazsežnem prostoru



Slika 5 : K višinskemu izreku v pravokotnem trikotniku

V pravokotnem trikotniku velja višinski izrek (*slika 5*)

(11) $$v^2 = a_c b_c$$

Ker iščemo analogijo v pravokotni piramidi, ga zapišimo:

V pravokotnem trikotniku je kvadrat dolžine višine na hipotenuzo enak produktu dolžin pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo.

Kot smo že uporabili pri izpeljavi Evklidovega izreka v pravokotni piramidi, ustreza hipotenuzi *c* osnovna ploskev *ΔABC*, katetam ustrezajo stranske ploskve *ΔABV, ΔACV* in *ΔBCV*, projekcijam katet na hipotenuzo pa pravokotne projekcije stranskih ploskev na osnovno ploskev. Te so *ΔABN, ΔACN* in *ΔBCN.* Kot je v pravokotnem trikotniku $a_c + b_c = c$, je tudi v pravokotni piramidi $S_{ABN} + S_{ACN} + S_{BCN} = S_{ABC}$.

Po analogiji bi višinski izrek v pravokotni piramidi na desni strani vseboval produkt projekcij stranskih ploskev na osnovno ploskev, torej $S_{ABN} \cdot S_{ACN} \cdot S_{BCN}$, na levi strani pa (glede na to, da je na desni strani (dolžinska enota)[6]) v^6.

Izračunajmo produkt $S_{ABN} \cdot S_{ACN} \cdot S_{BCN}$.

V razdelku 3.2 smo izpeljali formulo za ploščino trikotnika S_{ABN} (to je ploščine pravokotne projekcije stranske ploskve na osnovno ploskev) oziroma njen kvadrat (glej (8)) ter višino piramide v (glej (9)):

$(S_{ABN})^2 = \dfrac{a^2b^2 - a^2v^2 - b^2v^2}{4}$ ter $v^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$. V prvo enačbo vstavimo izraz za v^2 in izraz poenostavimo s pomočjo programa DERIVE 6 (glej *prilogo 1*) , po analogiji pa zapišemo še formuli za ostali dve projekciji in dobimo:

$$(S_{ABN})^2 = \frac{a^2b^2 - a^2v^2 - b^2v^2}{4} = \frac{a^4b^4}{4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}$$

$$(S_{ACN})^2 = \frac{a^2c^2 - a^2v^2 - c^2v^2}{4} = \frac{a^4c^4}{4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}$$

$$(S_{BCN})^2 = \frac{b^2c^2 - b^2v^2 - c^2v^2}{4} = \frac{b^4c^4}{4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}.$$

Izračunajmo produkt $(S_{ABN})^2 \cdot (S_{ACN})^2 \cdot (S_{BCN})^2$ ter v^6:

(12) $$(S_{ABN})^2 \cdot (S_{ACN})^2 \cdot (S_{BCN})^2 = \frac{a^8 b^8 c^8}{64(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^3}$$

(13) $$v^6 = \frac{a^6 b^6 c^6}{(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^3}$$

Primerjamo izraza (12) ter (13) in zapišimo nekaj možnih zvez. Upoštevamo še, da je prostornina tristrane pravokotne piramide s *slike 4* enaka $V = \frac{abc}{6}$.

(14) $$\frac{(S_{ABN})^2 \cdot (S_{ACN})^2 \cdot (S_{BCN})^2}{v^6} = \frac{a^2b^2c^2}{64} = \frac{9}{16}V^2$$

(15) $$S_{ABN} \cdot S_{ACN} \cdot S_{BCN} = \frac{3}{4}V \cdot v^3$$

(16) $$v^3 = \frac{2S_{BCN}}{a} \cdot \frac{2S_{ACN}}{b} \cdot \frac{2S_{ABN}}{c}$$

(17) $$v^2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{S_{ABN} \cdot S_{ACN} \cdot S_{BCN}}{S_{ABC}}}$$

(18) $$\frac{av}{2} \cdot \frac{bv}{2} \cdot \frac{cv}{2} = S_{ABN} \cdot S_{ACN} \cdot S_{BCN}$$

Za nobeno izmed izpeljanih zvez ne moremo trditi, da je analogija višinskega izreka v pravokotnem trikotniku. Mogoče se temu cilju najbolj približa zadnja enakost (18), kjer so izrazi $\frac{av}{2}$, $\frac{bv}{2}$ ter $\frac{cv}{2}$ analogi k višini (dolžini v pravokotnem trikotniku ustreza ploščina trikotnika v pravokotni tristrani

piramidi). Izraz $\frac{av}{2}$ je namreč po velikosti enak ploščini pravokotnega trikotnika s katetama a in v oziroma ploščini trikotnika z osnovnico a in višino v. Vendar je to navidezni trikotnik. Ploščina trikotnika *ΔANV (glej sliko 4)* pa seveda ni enaka $\frac{av}{2}$. Enako velja za druga dva izraza $\frac{bv}{2}$ ter $\frac{cv}{2}$.

Razdelek lahko sklenemo z ugotovitvijo, da po obravnavanem postopku nismo ugotovili zveze med količinami v pravokotni tristrani piramidi, za katero bi lahko trdili, da je analogna višinskemu izreku v pravokotnem trikotniku.

Mimogrede sem izračunal izraz $\frac{1}{v^2}$ v pravokotni piramidi (glej *prilogo 2*). Dobimo naslednji izraz:

(19) $$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

Preveril sem ga tudi v pravokotnem trikotniku:

(20) $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}=\frac{1}{v^2},$$

saj je v pravokotnem trikotniku $\frac{c\cdot v}{2}=\frac{ab}{2}$. V tem primeru je analogija popolna.

Opomba: Preiskovanje trirazsežnega višinskega izreka s programom DERIVE 6 je v *prilogi 2*.

4. DRUGI DOKAZI TRIRAZSEŽNEGA PITAGOROVEGA IZREKA

4.1 Dokaz s pomočjo trirazsežnega Evklidovega izreka

V razdelku 3.2 (7) smo dokazali trirazsežni Evklidov izrek

$(S_{VAB})^2 = S_{ABN} \cdot S_{ABC}$

Po analogiji velja tudi:

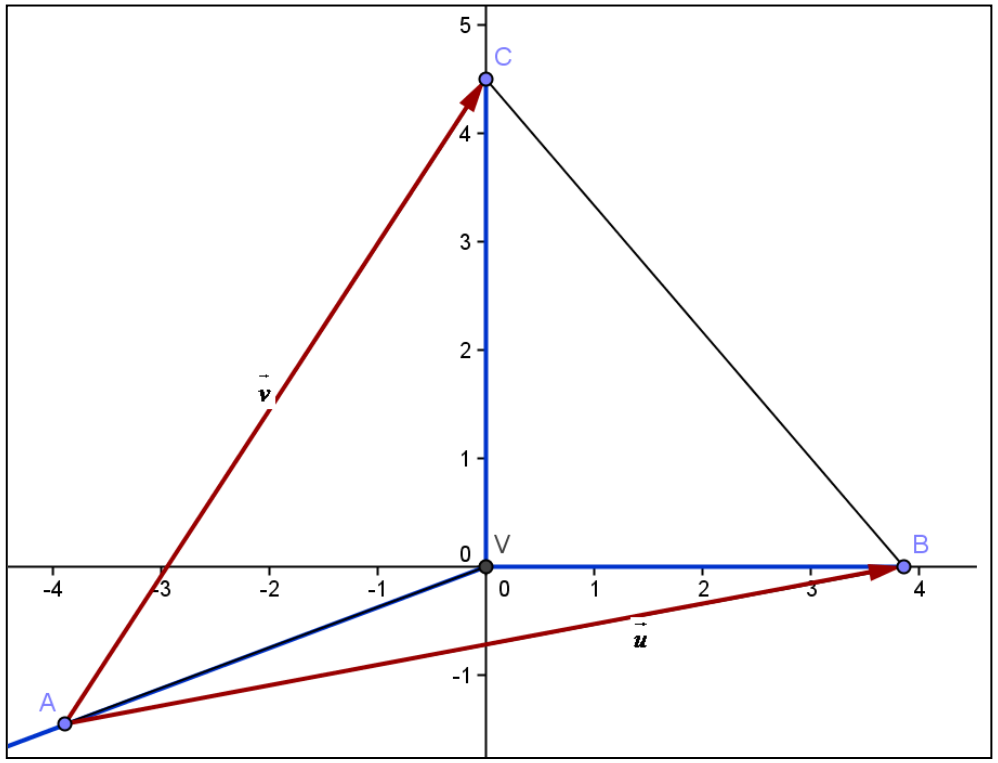
$(S_{VBC})^2 = S_{BCN} \cdot S_{ABC}$

$(S_{VAC})^2 = S_{ACN} \cdot S_{ABC}$

Seštejemo:

$(S_{VAB})^2 + (S_{VBC})^2 + (S_{VAC})^2 = S_{ABN} \cdot S_{ABC} + S_{BCN} \cdot S_{ABC} + S_{ACN} \cdot S_{ABC} = (S_{ABN} + S_{BCN} + S_{ACN}) \cdot S_{ABC} = S_{ABC} \cdot S_{ABC} = (S_{ABC})^2$, *q.e.d.*

4.2 Dva dokaza z uporabo vektorskega produkta



Slika 6: Pravokotna tristrana piramida v koordinatnem sistemu

4.2.1 Prvi dokaz[5]

Obravnavano telo postavimo tako, da je vrh *V* v izhodišču trirazsežnega koordinatnega sistema, robovi, ki so paroma pravokotni, pa naj ležijo na koordinatnih oseh *(slika 6).* Točke *A, B* in C v R^3 naj imajo koordinate:

A(a,0,0)

B(0,b,0)

C(0,0,c).

Naj bo vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VA} = (-a,b,0)$, vektor $\vec{v}$ pa $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VA} = (-a,0,c)$. Izračunajmo ploščino trikotnika *ABC.* Ker je v splošnem absolutna vrednost vektorskega produkta $\vec{x} \times \vec{y}$ enaka ploščini paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$, je

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |(-a,b,0) \times (-a,0,c)| = \frac{1}{2} |(bc, ac, ab)| = \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2} .$$

Od tod seveda sledi, da je $(S_{ABC})^2 = \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4} + \frac{a^2b^2}{4} = (S_{VBC})^2 + (S_{VAC})^2 + (S_{VAB})^2; \quad q.e.d.$

[5] Prirejeno po (Frohman, 2010: 3)

4.2.2 Drugi dokaz[6]

Tako kot v prejšnjem primeru postavimo našo »pravokotno« piramido tako, da je vrh *V* v izhodišču koordinatnega sistema, med seboj pravokotne stranice pa naj ležijo na koordinatnih oseh (glej *sliko 6*). V koordinatni sistem vpeljemo običajno ortonormirano bazo z vektorji $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Krajevne vektorje točk *A, B* in *C* izrazimo z baznimi vektorji

$$\overrightarrow{VA} = \vec{a} = a\vec{i}\,, \quad \overrightarrow{VB} = \vec{b} = b\vec{j} \;\text{ in }\; \overrightarrow{VC} = \vec{c} = c\vec{k}$$

Ter vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = b\vec{j} - a\vec{i}\,, \quad \overrightarrow{AC} = c\vec{k} - a\vec{i}$$

Tako je

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(b\vec{j} - a\vec{i}) \times (c\vec{k} - a\vec{i})| =$$

$$= \frac{1}{2}|bc\vec{j} \times \vec{k} - ab\vec{j} \times \vec{i} - ac\vec{i} \times \vec{k} + a^2\vec{i} \times \vec{i}| =$$

$$= \frac{1}{2}|bc\vec{i} - ab(-\vec{k}) - ac(-\vec{j})| =$$

$$= \frac{1}{2}|bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}; \quad q.e.d.$$

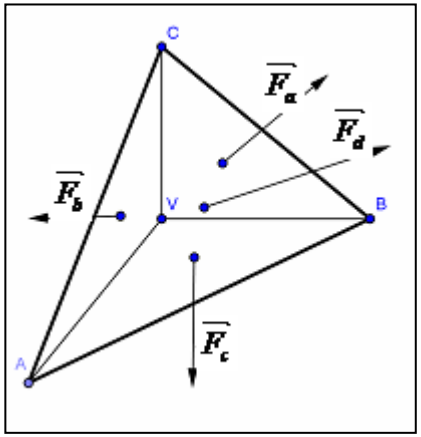
[6] Prirejeno po (Alvarez: 2)

4.3 Fizikalni dokaz[7]

Pravokotno piramido napolnimo s stisnjenim plinom. Sile na ploskve označimo $\overrightarrow{F_a}$, $\overrightarrow{F_b}$, $\overrightarrow{F_c}$ in $\overrightarrow{F_d}$ *(slika 7).* Vsota vseh notranjih sil plina na piramido je enaka nič $\overrightarrow{F_a}+\overrightarrow{F_b}+\overrightarrow{F_c}=-\overrightarrow{F_d}$, saj bi se drugače piramida gibala v smeri rezultante sil, kar bi bilo v nasprotju z zakonom o ohranitvi energije oz. bi bil to njen neomejen vir. Ker je $(\overrightarrow{F_a}+\overrightarrow{F_b})\perp\overrightarrow{F_c}$, velja Pitagorov izrek: $\left|\overrightarrow{F_a}+\overrightarrow{F_b}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_c}\right|^2=\left|\overrightarrow{F_d}\right|^2$. Podobno je $\left|\overrightarrow{F_a}+\overrightarrow{F_b}\right|^2=\left|\overrightarrow{F_a}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_b}\right|^2$. Od tu sledi

(21) $$\left|\overrightarrow{F_a}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_b}\right|^2+\left|\overrightarrow{F_c}\right|^2=\left|\overrightarrow{F_d}\right|^2.$$

Če v zgornjo enakost (21) vstavimo



Slika 7: Prikaz sil na ploskve

$$\left|\overrightarrow{F_a}\right|=tlak\cdot površina=p\cdot S_{ABV}$$

$$\left|\overrightarrow{Fb}\right|=tlak\cdot površina=p\cdot S_{BCV}$$

$$\left|\overrightarrow{Fc}\right|=tlak\cdot površina=p\cdot S_{ACV}$$

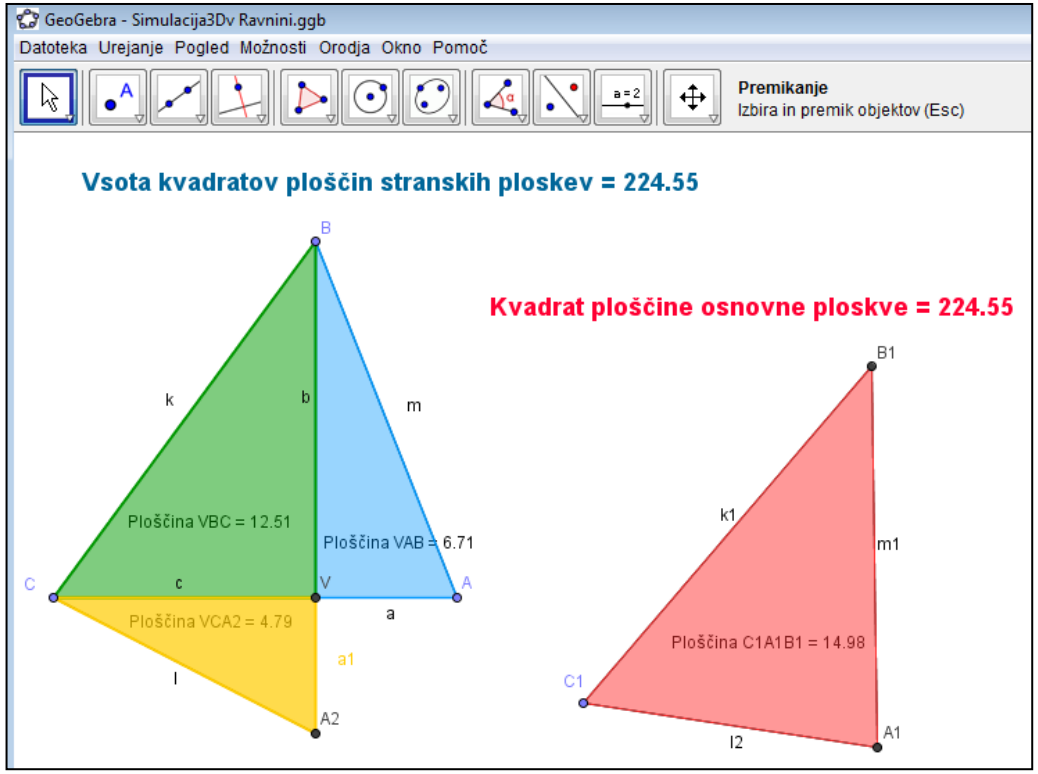
$$\left|\overrightarrow{F_d}\right|=tlak\cdot površina=p\cdot S_{ABC}$$

ter krajšamo s p^2, je posplošitev Pitagorovega izreka v R^3 dokazana.

[7] Povzeto po (Levi,2009: 19)

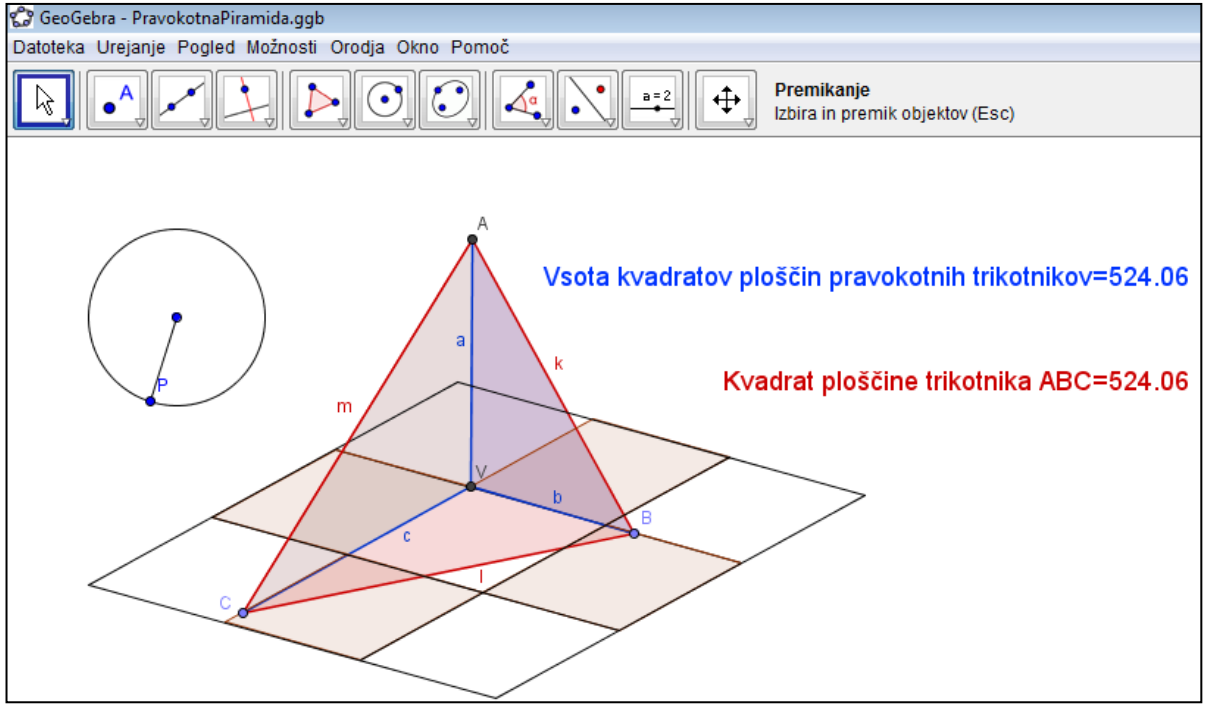
4.4 »Dokaz« s pomočjo dinamične geometrije

Nazorno lahko prikažemo veljavnost Pitagorovega izreka v pravokotni tristrani piramidi ABCV tako, da v programu za dinamično geometrijo (uporabili smo program GeoGebra) narišemo plašč in osnovno ploskev $A_1B_1C_1$ (*slika 8*). Za računanje ploščine smo uporabili vgrajeno funkcijo »Ploščina«). S programom lahko spreminjamo dolžine stranskih robov *a, b* in *c* (lego točk *A, B, C*). Pri tem opazimo, da imata oba izraza *Vsota kvadratov ploščin stranskih ploskev* ter *Kvadrat ploščine osnovne ploskve* vedno enako vrednost.



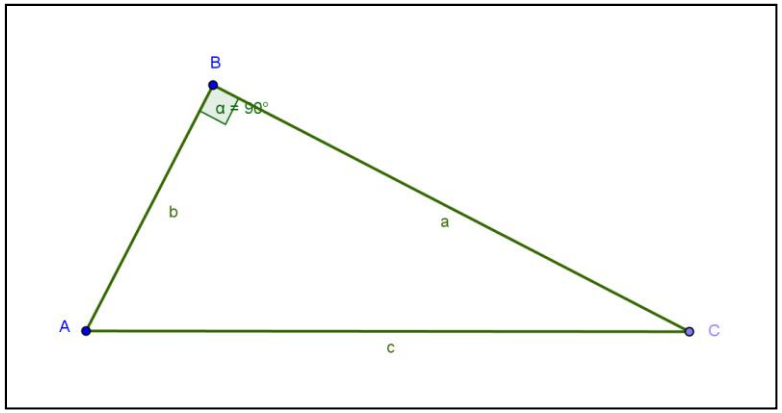
Slika 8: Nazorni prikaz trirazsežnega Pitagorovega izreka – projekcije ploskev v ravnino

Na *sliki 9* je prav tako prikazan trirazsežni Pitagorov izrek (v 3D pogledu v programu GeoGebra, robovi *a, b* in *c* so paroma pravokotni). Spreminjamo lahko lege točk *A, B* in *C* po nosilkah robov, premik točke P po krožnici pa omogoča rotacijo piramide okrog nosilke daljice *a*. Tu smo zapisali tele izračune: $s = \frac{k+l+m}{2}$, *Kvadrat ploščine trikotnika ABC* = $s(s-k)(s-l)(s-m)$, *Vsota kvadratov ploščin pravokotnih trikotnikov* = $= \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2$. Ko premikamo točke *A, B* ali *C,* sta vrednosti pri zadnjih dveh izrazih vedno enaki.



Slika 9: Nazorni prikaz trirazsežnega Pitagorovega izreka v 3D pogledu

5. ŠTIRIRAZSEŽNI PITAGOROV IZREK

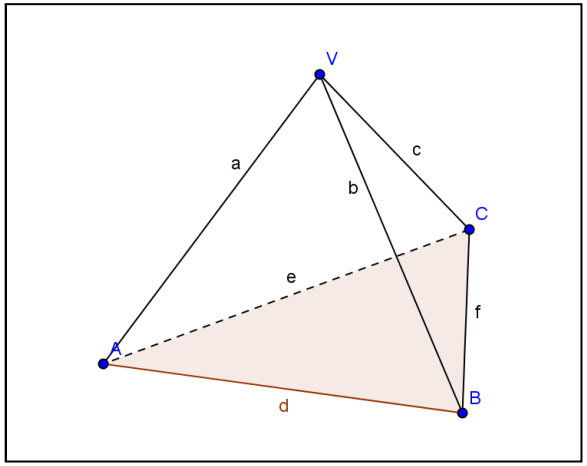


Slika 10 : Pravokotni trikotnik (ortogonalni 2-simpleks)

Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku v ravnini *(slika 10)* povezuje kvadrate dolžin stranic:

Vsota kvadratov dolžin stranic, ki se stikata v stičišču pravokotnic, je enaka kvadratu dolžine stranice, ki leži nasproti stičišča pravokotnic:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



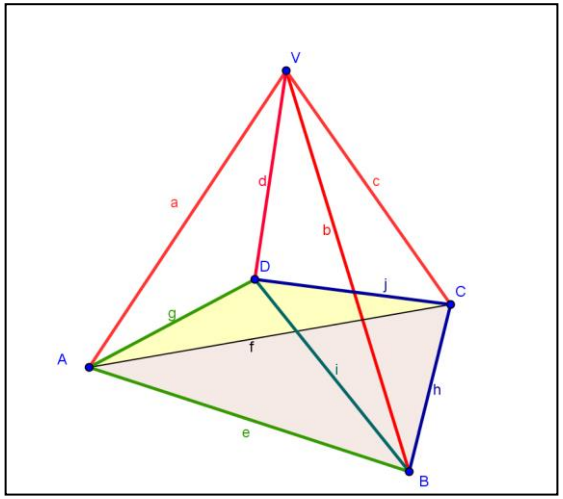
Slika 11: Pravokotna tristrana piramida (ortogonalni 3-simpleks)

Pri piramidi na *sliki 11* se stranski robovi stikajo v vrhu *V* in so paroma pravokotni. Posplošitev Pitagorovega izreka v trirazsežnem prostoru se glasi:

Vsota kvadratov ploščin tistih ploskev, ki imajo vrh v stičišču pravokotnih robov, je enaka kvadratu ploščine ploskve, določene s tistimi stranicami stranskih ploskev, ki ležijo nasproti stičišča pravokotnic.

$$(S_{ABV})^2 + (S_{ACV})^2 + (S_{BCV})^2 = (S_{ABC})^2$$

Dokaz je v prejšnjem razdelku.



Slika 12: Skica štiristrane pravokotne piramide (ortogonalni 4-simpleks)

Telo na *sliki 12* je seveda štiridimenzionalno. Vse štiri stranice *AV, BV, CV* in *DV* se stikajo v skupni točki *V* in so paroma pravokotne. Posplošitev Pitagorovega izreka v štirirazsežni prostor se tako glasi:

(22) ***Izrek: Vsota kvadratov prostornin tistih pravokotnih tristranih piramid, ki imajo vrh v stičišču pravokotnih robov, je enaka kvadratu prostornine tiste tristrane piramide, omejene s trikotnimi ploskvami, ki ležijo nasproti stičišča pravokotnic.***

$$(V_{ABDV})^2 + (V_{ABCV})^2 + (V_{ACDV})^2 + (V_{BCDV})^2 = (V_{ABCD})^2$$

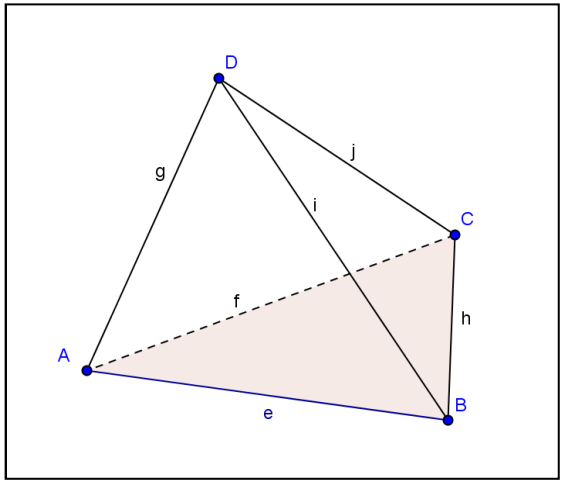
Dokaz:

Piramide *ABDV, ABCV, ACDV* in *BCDV* so pravokotne tristrane piramide, zato so njihove prostornine enake

(23) $$V_{ABDV} = \frac{abd}{6}, \quad V_{ABCV} = \frac{abc}{6}, \quad V_{ACDV} = \frac{acd}{6}, \quad V_{BCDV} = \frac{bcd}{6}.$$

Piramida *ABCD* (*sliki 12 in 13*) ima robove *e, f, g, h, i, j.* Vsak izmed teh robov je hipotenuza v enem izmed pravokotnih trikotnikov, ki imajo vrh v stičišču pravokotnic *V*. Zato so njihove dolžine enake:

(24) $$e = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad f = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad g = \sqrt{a^2 + d^2}, \quad h = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad i = \sqrt{b^2 + d^2}, \quad j = \sqrt{c^2 + d^2}.$$



Slika 13: Tristrana piramida ABCD v štirirazsežni pravokotni piramidi ABCDV (s slike 12)

Prostornino nepravilne tristrane piramide z robovi *e, f, g, h, i, j* izračunamo po znani formuli (Bronštejn, 2009: 127):

$$V_{ABCD}{}^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & e^2 & f^2 & g^2 & 1 \\ e^2 & 0 & h^2 & i^2 & 1 \\ f^2 & h^2 & 0 & j^2 & 1 \\ g^2 & i^2 & j^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

V formuli izrazimo dolžine robov s stranicami *a, b, c* in *d* iz (21):

$$V_{ABCD}{}^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & a^2+b^2 & a^2+c^2 & a^2+d^2 & 1 \\ a^2+b^2 & 0 & b^2+c^2 & b^2+d^2 & 1 \\ a^2+c^2 & b^2+c^2 & 0 & c^2+d^2 & 1 \\ a^2+d^2 & b^2+d^2 & c^2+d^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Pri izračunu te determinante sem si pomagal s programom DERIVE 6 (glej *prilogo 3*). Rezultat je

$$V^2{}_{ABCD} = \frac{a^2b^2c^2}{36} + \frac{a^2b^2d^2}{36} + \frac{a^2c^2d^2}{36} + \frac{b^2c^2d^2}{36} =$$
$$= V^2_{ABCV} + V^2_{ABDV} + V^2_{ACDV} + V^2_{BCDV}\,,\ \ q.e.d.$$

6. RAZPRAVA IN SKLEPI

Pitagorov izrek je pomembna lastnost, ki velja v pravokotnem trikotniku. Z njim lahko izračunamo razdaljo med dvema točkama v ravnini in v trirazsežnem prostoru. Tudi kosinusni izrek je njegova posplošitev. Posebej zanimive so posplošitve v višje dimenzije. V nalogi sem opisal posplošitev Pitagorovega izreka v trirazsežni prostor, ki je znana pod imenom *de Guajev izrek*. Povzel sem več različnih dokazov tega izreka. S tem je bil prvi zastavljeni cilj dosežen. Med dokazi je bil posebno zanimiv fizikalni dokaz te posplošitve. Zdi se presenetljivo, da se da matematične lastnosti dokazati tudi s fizikalnim razmislekom. Mogoče pa to niti ni tako presenetljivo in je Pitagorov izrek pravzaprav naravni zakon.

Drugi cilj je bil dokaz hipoteze, da v trirazsežnem prostoru obstajata izreka, ki sta analogna Evklidovemu in višinskemu izreku v pravokotnem trikotniku. Dokazal sem, da v trirazsežnem prostoru (v pravokotni tristrani piramidi) velja izrek, ki je analogen Evklidovemu izreku. Ni mi pa uspelo dokazati predpostavke, da velja izrek, ki je analogen višinskemu izreku. Mogoče tak izrek obstaja, vendar bi bilo verjetno potrebno definirati, kaj je v pravokotni piramidi analogno višini na hipotenuzo v pravokotnem trikotniku. Skratka, hipoteza, da obstajata v trirazsežnem prostoru izreka, ki sta analogna Evklidovemu in višinskemu izreku, je bila delno potrjena.

V literaturi sem zasledil, da obstaja posplošitev Pitagorovega izreka v n-dimenzionalnem evklidskem prostoru, vendar dokaz presega srednješolsko znanje. V pregledani literaturi nisem nikjer zasledil posplošitve v štirirazsežni prostor (razen splošnega dokaza za posplošitev v n-razsežni prostor). V nalogi sem opisal izrek in ga dokazal. Pri tem je bilo potrebno izračunati prostornino tristrane piramide, pri kateri so bile znane dolžine vseh šestih robov. Za to sem uporabil formulo iz matematičnega priročnika (Bronštejn, 2009: 127), ki pa seveda presega matematično snov srednje šole. Za sam izračun prostornine sem uporabil program DERIVE. S tem je bil tretji zastavljeni cilj sicer dosežen, vendar sem moral pri tem uporabiti formulo, ki je v srednješolskih učbenikih ni. Za naslednji izziv bi bilo zanimivo postaviti hipotezo za štirirazsežni Evklidov izrek in jo dokazati.

7. VIRI IN LITERATURA

7.1 Literatura

[1] Bronštejn, I. N. et al. 2009: *Matematični priročnik*. Tehniška založba Slovenije, Ljubljana.

[2] Levi, M. 2009: *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*. Princeton University Press, Princeton.

[3] Struik, D. J. 1978: *Kratka zgodovina matematike.* Državna založba Slovenije, Ljubljana.

7.2 Internetni viri

[4] Alvarez, S. A.: *Note on an n-dimensional Pythagorean Theorem* (online). (citirano 25. 11. 2009). Dostopno na spletnem naslovu:

http://www.cs.bc.edu/~alvarez/NDPyt.pdf

[5] Frohman, C. 2010: *The Full Pythagorean Theorem* (online). (citirano 7. 2. 2010). Dostopno na spletnem naslovu:

http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1001/1001.0201v1.pdf

[6] Wolfram MathWorld: *The Gua's Theorem* (online). (citirano 25.11.2009). Dostopno na spletnem naslovu:

http://mathworld.wolfram.com/deGuasTheorem.html

[7] Wong, W. W. 2002: *A Generalized N-Dimensional Pythagorean* Theorem (online). (citirano 15. 2. 2010). Dostopno na spletnem naslovu:

http://www.dpmms.cam.ac.uk/~ww278/papers/gp.pdf

8. PRILOGE

Priloga 1: Izpeljava trirazsežnega Evklidovega izreka s programom DERIVE 6

Priloga 2: Preiskovanje trirazsežnega višinskega izreka s programom DERIVE 6

Priloga 3: Štirirazsežni Pitagorov izrek s programom DERIVE 6