RAZISKOVALNA NALOGA

Sinus in kosinus quadraticus

Avtorji: Jakob Božič, Miha Debenjak, Primož Ruter

Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.

Področje: *matematika in logika*

April, 2015

Škofijska gimnazija Vipava

Zahvala

Zahvaljujemo se:

- našemu mentorju mag. Alojzu Grahorju za spodbude pri izdelavi raziskovalne naloge in

- dr. Iztoku Baniču s Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru za osnovno idejo raziskovalne naloge.

- profesorici angleškega jezika Sonji Matelič za skrben pregled in korekture povzetka v angleškem jeziku

Povzetek

Kotne funkcije poljubnega kota so definirane s koordinatami točke, ki leži na presečišču enotske krožnice in premičnega kraka kota: abscisa je kosinus, ordinata sinus kota. V raziskovalni nalogi smo namesto enotske krožnice $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$ vzeli enotski kvadrat, to je množico točk v ravnini, ki ustreza enačbi $|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| = \mathbf{1}$. Nove funkcije smo poimenovali *kvadratične funkcije* (funkcije *quadraticus)* in sicer *sinus quadraticus* in *kosinus quadraticus (kvadratični sinus in kvadratični kosinus),* označili pa z *f(x)* = sinq*(x)* in *f(x)* = cosq*(x).* Izpeljali smo njihove funkcijske predpise, narisali njihove grafe, izračunali natančne vrednosti pri nekaterih kotih, opisali lastnosti, izpeljali zveze med njimi in zveze z običajnimi kotnimi funkcijami, izračunali odvode, nedoločena integrala, inverzni funkciji ter izpeljali in dokazali adicijske izreke. Poleg tega smo posplošili definicije kotnih funkcij na poljubni enotski krivulji $|\mathbf{x}|^{\mathbf{n}} + |\mathbf{y}|^{\mathbf{n}} = \mathbf{1}, \mathbf{n} \in \mathbf{N},$ izpeljali njihove funkcijske predpise in skicirali grafe.

Ključne besede: *kotne funkcije, kvadratične funkcije, funkcije quadraticus, sinus quadraticus, kosinus quadraticus*

ABSTRACT

The trigonometric functions of a random angle are defined by the coordinates of the point P, which is situated on the unit circle, as follows: if P is a point on the unit circle and if the ray from the origin (0,0) to P makes an angle from the positive x-axis, then the abscissa of P is the cosine and the ordinate of P is the sine of the angle. In the research paper the unit circle was replaced with the unit square which equals a set of points following the equation $|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| = \mathbf{1}$. The new functions were named the 'quadraticus functions', 'the sine quadraticus' and 'the cosine quadraticus', and were marked as f(x) = sinq(x) and f(x) = cosq(x). Their function formulas were derived, their graphs drawn, the exact values of some angles were calculated, their properties described, the identities between them and the identities between the trigonometric and the quadraticus functions were established. The derivatives and indefinite integrals were also calculated, the inverse functions found and the addition theorems were derived and proved. Furthermore, the definitions of the trigonometric functions on a random unit curve $|\mathbf{x}|^{\mathbf{n}} + |\mathbf{y}|^{\mathbf{n}} = \mathbf{1}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}$ were generalized, their definitions were derived and their graphs sketched.

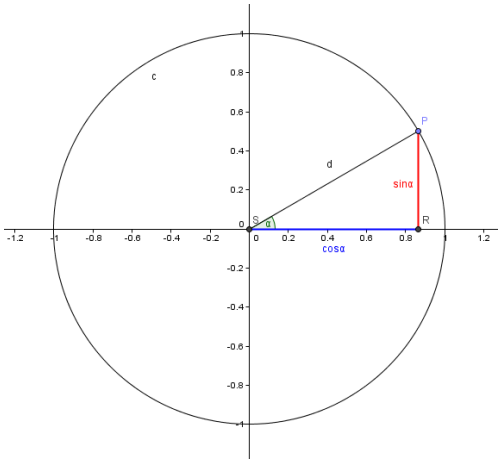
Key words: *trigonometric functions, sinus, cosinus, sinus quadraticus, cosinus quadraticus*

Kazalo

1. Uvod

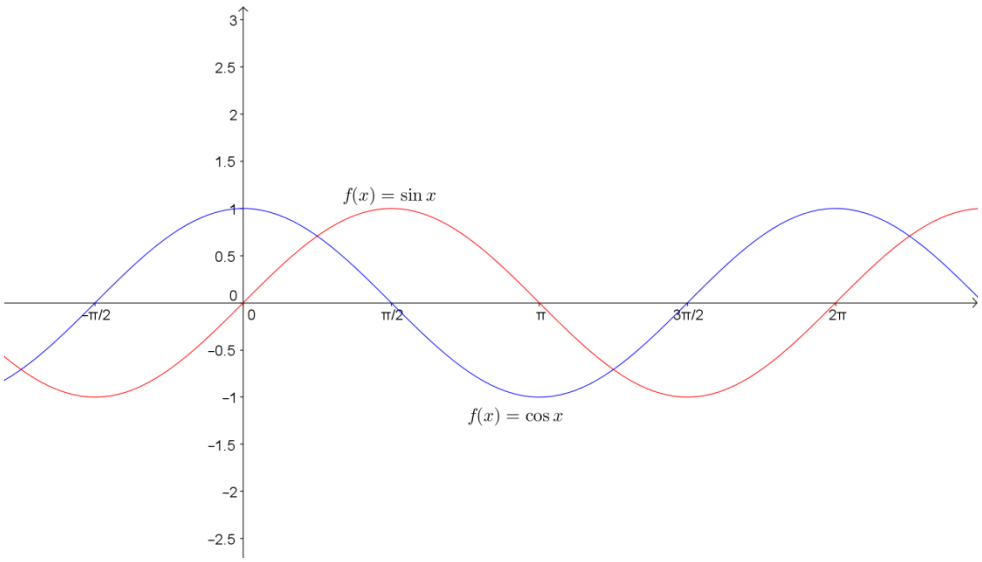
1.1. Definicija kotnih funkcij poljubnega kota na enotski krožnici

Kotni funkciji sinus in kosinus poljubnega kota definiramo na enotski krožnici $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$ s koordinatami točke P, ki leži na presečišču premičnega kraka kota in enotske krožnice: kosinus kota je enak abscisi, sinus pa ordinati točke P: $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (Slika 1).



Slika 1: Definicija vrednosti sinusa in kosinusa kota na enotski krožnici

Funkcijo sinus definiramo kot funkcijo $f: R \to R, f(x) = \sin x$, funkcijo kosinus pa kot funkcijo $f: R \to R, f(x) = \cos x$, kjer je x velikost kota. Grafa teh dveh funkcij sta prikazana na sliki 2. Druge lastnosti teh funkcij pa so obravnavane v srednješolskih učbenikih, na primer v viru ([1], 126-195).



Slika 2: Grafa funkcij sinus in kosinus

Zanimalo nas je, kakšne funkcije dobimo, če namesto enotske krožnice vzamemo enotski kvadrat, to je kvadrat z oglišči v točkah $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$ in $D(0,-1)$, definicijo pa ohranimo enako. Tako smo dobili nove »kotne funkcije na enotskem kvadratu.« Poimenovali smo jih *kvadratične funkcije*[1] ali *funkcije quadraticus* in sicer *sinus quadraticus* (*kvadratični sinus*) ter *kosinus quadraticus (kvadratični kosinus)* po zgledu hiperboličnih funkcij (sinus in kosinus hiperbolicus) in jih označili z sinq ter cosq. Kasneje smo odkrili v edinem viru, da so jih tudi tam poimenovali *sinus* in *cosinus quadraticus* (glej vir [1]).

1.2. Cilji

Cilj naloge so:

- definirati kvadratične funkcije (to je funkciji *sinus in kosinus quadraticus*) na enotskem kvadratu $|x| + |y| = 1$ na enak način, kot sta definirani funkciji sinus in kosinus na enotski krožnici,
- opisati lastnosti funkcij *quadraticus*,
- primerjati lastnosti funkcij *quadraticus* s kotnimi funkcijami sinus, kosinus in tangens,
- izpeljati adicijske izreke za funkcije *quadraticus* in
- posplošiti definicijo kotnih funkcij na poljubni enotski krivulji $|\mathbf{x}|^{\mathbf{n}} + |\mathbf{y}|^{\mathbf{n}} = \mathbf{1}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}$.

1.3. Metode dela

Pri pisanju naloge smo kot temeljno metodo uporabljali metodo matematičnega sklepanja in dokazovanja.

Za risanje grafov smo uporabili grafični program Geogebra, ki je dostopen na spletni strani na naslovu https://www.geogebra.org/, za poenostavljanje izrazov in reševanje enačb pa smo uporabljali interaktivni program WolframAlpha, dostopen na

http://www.wolframalpha.com/input/?i=x^2%2By^2%3D1&x=0&y=0.

V nam dostopnih knjižnicah in internetnih bazah nismo našli literature v zvezi z obravnavano temo, razen kratkega prispevka na forumu spletne strani programa Geogebra (glej vir [2]), kjer pa so nekatere napake. Za opis lastnosti kotnih funkcij sinus, kosinus in tangens smo uporabljali učbenik za tretji letnik gimnazije (vir [1], 126-195).

[1] SSJK: kvadrátičen -čna -o prid. (á) *kvadraten:* kvadratično dvorišče; kvadratična okenca / kvadratičen prerez stavbnega lesa

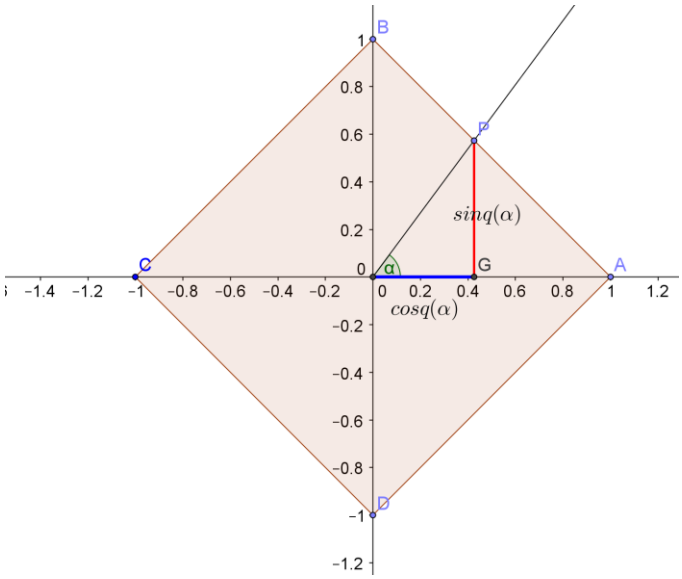
2. Kotne funkcije sinq(x), cosq(x), tanq(x) na enotskem kvadratu

2.1. Definicije vrednosti sinus in kosinus quadraticus

Definicija 1: *Enotski kvadrat* je množica točk v ravnini, ki zadoščajo enačbi $|x| + |y| = 1$. (Slika 3).

Definicija 2: *Sinus quadraticus* poljubnega kota α je enak ordinati točke, ki leži na presečišču premičnega kraka kota in enotskega kvadrata. To vrednost bomo označili s sinq(α) (Slika 3).

Definicija 3: *Kosinus quadraticus* poljubnega kota α je enak abscisi točke, ki leži na presečišču premičnega kraka kota in enotskega kvadrata. To vrednost bomo označili s cosq(α) (Slika 3).

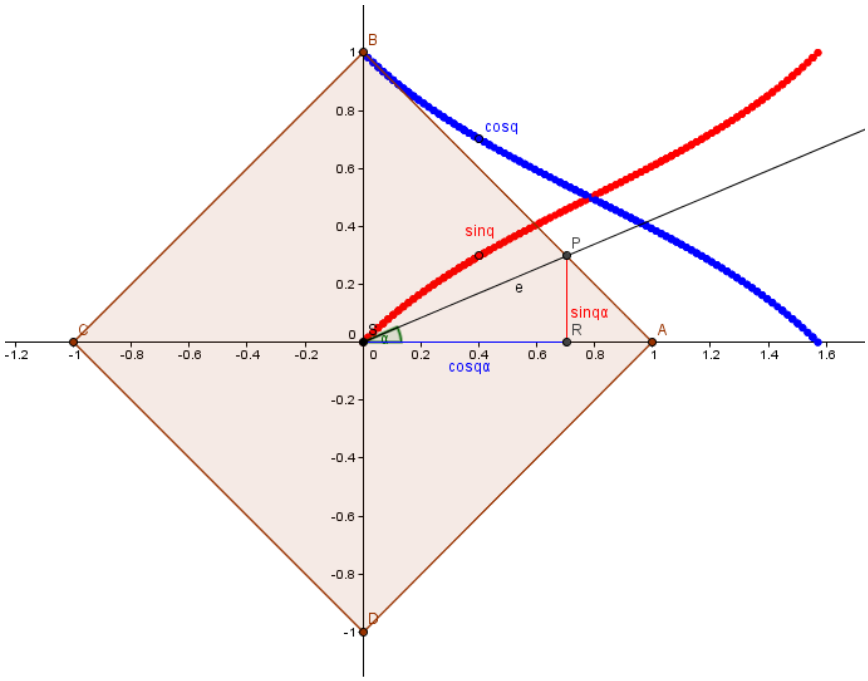


Slika 3: Definicija vrednosti sinusa in kosinusa quadraticus na enotskem kvadratu

2.2. Funkcija sinus quadraticus

Definicija 4: Funkcija *sinus quadraticus* je funkcija $f: R \to R; f(x) = \text{sinq}(x)$.

Graf funkcije sinus quadraticus narišemo tako, kot običajno narišemo graf funkcije sinus: na abscisno os nanesemo vrednost kota, na ordinatno pa vrednost ordinate točke P, ki leži na presečišču enotskega kvadrata in premičnega kraka kota. Graf, dobljen s pomočjo programa Geogebra, je na sliki 4.

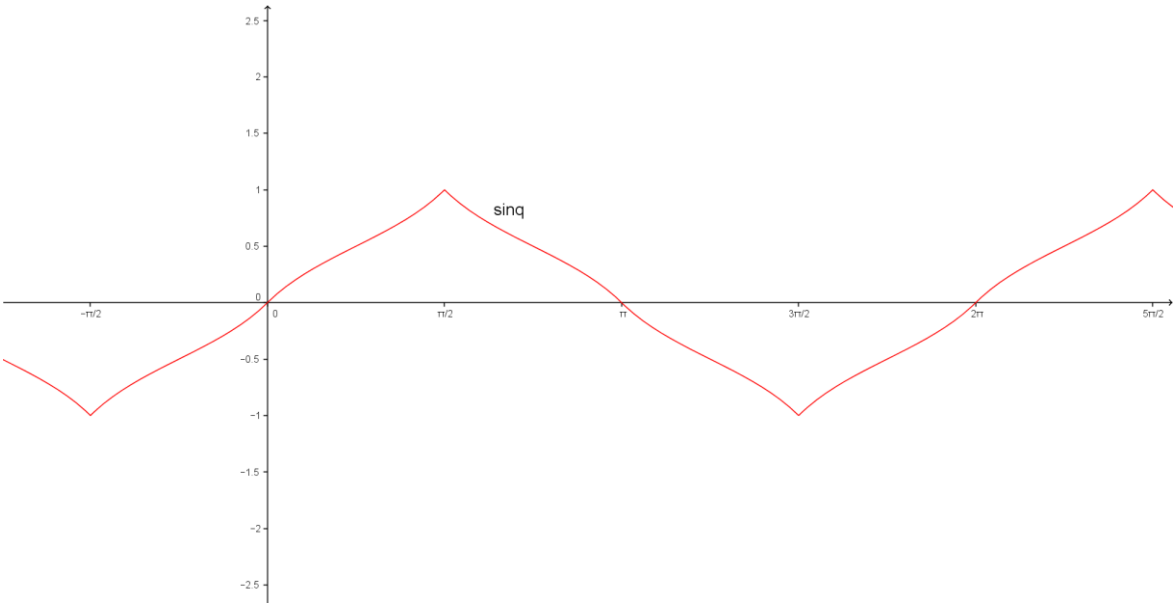


Slika 4: Nastanek grafov funkcije sinus in kosinus quadraticus v prvem kvadrantu

Iz definicije funkcije sinus quadraticus je razvidno, da je njeno definicijsko območje enako $D_f = R$, njena zaloga vrednosti pa $Z_f = [-1,1]$. Ker je graf simetričen glede na koordinatno izhodišče, lahko trdimo, da je sinus quadraticus liha funkcija (računski dokaz sledi kasneje). Funkcija sinus quadraticus je periodična z osnovno periodo 2π. Velja torej:

$$\mathrm{sinq}(x + 2k\pi) = \mathrm{sinq}(x) \tag{1}$$

Graf funkcije sinus quadraticus je na sliki 5.

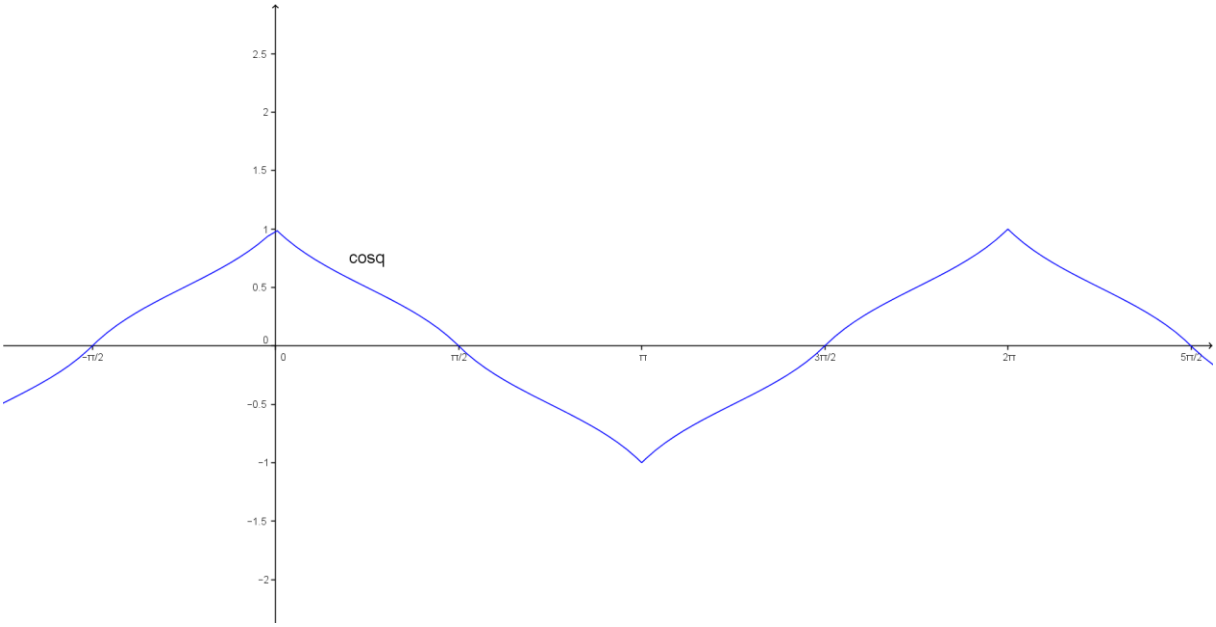


Slika 5: Graf funkcije sinus quadraticus ($f(x) = \mathrm{sinq}(x)$)

2.3. Funkcija kosinus quadraticus

Definicija 5: Funkcija *kosinus quadraticus* je funkcija $f: R \to R; f(x) = \mathrm{cosq}(x)$.

Podobno kot pri funkciji sinus quadraticus narišemo graf funkcije kosinus quadraticus (glej sliko 6.



Slika 6: Graf funkcije kosinus quadraticus ($f(x) = \mathrm{cosq}(x)$)

Iz definicije sledijo tudi osnovne lastnosti funkcije kosinus quadraticus: definicijsko območje jeenako $D_f = R$, zaloga vrednosti pa $Z_f = [-1,1]$. Ker je graf simetričen glede na ordinatno os je kosinus quadraticus soda funkcija (računski dokaz sledi kasneje). Funkcija kosinus quadraticus je periodična z osnovno periodo 2π. Velja torej:

$$\mathrm{sinq}(x + 2k\pi) = \mathrm{sinq}(x) \tag{2}$$

Prav tako sledi iz definicije, da je

$$\mathrm{cosq}(x) = \mathrm{sinq}(x + \tfrac{\pi}{2}), \tag{3}$$

kar pomeni, da dobimo graf funkcije kosinus quadraticus s premikom grafa funkcije sinus quadraticus za $\frac{\pi}{2}$ v levo.

2.4. Izpeljava funkcijskih predpisov za funkciji sinq(x) in cosq(x)

Enačba premice skozi točki A in B (glej sliko 3) je $y = 1 - x$. Naj bo α ostri kot, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Točka D je točka na presečišču premičnega kraka kota α in premice $y = 1 - x$. Njene koordinate so D(cosq(α), sinq(α)).

Naj bo točka $E(x, 0)$. Abscisa x je seveda enaka cosq*(α).* Točka D ima zato koordinati $D(x, y) = D(x, 1 - x)$. Poiščimo zvezo med x in kotom α. Zapišimo običajni tan*(α)*:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{1 - x}{x}$$

Od tu izrazimo x:

$$x \tan(\alpha) = 1 - x$$

$$x = \frac{1}{1+\tan(\alpha)}$$

$$x = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}$$

Ker smo z x označili absciso točke E, ki je tudi $\mathrm{cosq}(x)$, je potem:

$$\mathrm{cosq}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)} \tag{4}$$

Podobno ali pa kar iz zveze $y = 1 - x$ oziroma $\mathrm{sinq}(x) = 1 - \mathrm{cosq}(x)$ dobimo, da je

$$\mathrm{sinq}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)} \tag{5}$$

Obe formuli (4) in (5) veljata le za kote $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, natančneje (zaradi periodičnosti funkcij) za kote $\alpha \in \left[k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in Z\right]$.

Poleg sinusa in kosinusa quadraticus lahko na enak način kot na enotski krožnici definiramo tudi tangens quadraticus kot kvocient med sinus quadraticus in kosinus quadraticus:

$$\mathrm{tanq}(x) = \frac{\mathrm{sinq}(x)}{\mathrm{cosq}(x)} = \tan(x)$$

Funkcija tangens quadraticus je enaka funkciji tangens.

V formulah (4) in (5) zamenjamo α z x, da dobimo običajni zapis funkcijskih predpisov:

$$\mathrm{sinq}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)} \tag{6}$$

$$\mathrm{cosq}(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)} \tag{7}$$

Funkcijska predpisa pa seveda veljata le za kote $x \in \left[k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in Z\right]$. Predpisa smiselno z upoštevanjem funkcijskih transformacij dopolnimo še za ostale kote. Tako dobimo:

$$\mathrm{sinq}\, x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}, & k \cdot 2\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}, & \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < \pi + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{-\sin x}{\sin x + \cos x}, & \pi + k \cdot 2\pi \leq x < \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{\sin x}{\cos x - \sin x}, & \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < 2\pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

$$\mathrm{cosq}\, x = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}, & k \cdot 2\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{\cos x}{\sin x - \cos x}, & \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < \pi + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{-\cos x}{\sin x + \cos x}, & \pi + k \cdot 2\pi \leq x < \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{\cos x}{\cos x - \sin x}, & \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < 2\pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

2.5. Zveze med funkcijami quadraticus pri komplementarnih kotih

a. Dokaz zveze za komplementarne kote $\text{sinq}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{cosq}(\alpha)$:

$$\text{sinq}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\text{cosq}(\alpha)$$

b. Dokaz zveze za komplementarne kote $\text{cosq}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\text{sinq}(\alpha)$:

$$\text{cosq}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\text{sinq}(\alpha)$$

2.6.Tabela natančnih vrednosti funkcij quadraticus nekaterih kotov

Izračunajmo nekaj natančnih vrednosti za kote $0^0, 15^0, 22{,}5^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0$ in 90^0. Rezultati so zbrani v tabeli 1.

Kot α v stopinjah	Kot α v radianih	sinq(α)	cosq(α)	tanq(α)
0°	0	0	1	0
15°	π/12	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$2-\sqrt{3}$
22,5°	π/8	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}-1$
30°	π/6	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	π /4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
60°	π /3	$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
75°	5π/12	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$2+\sqrt{3}$
90°	π/2	1	0	/

Tabela 1: Tabela natančnih vrednsti funkcij quadraticus nekaterih kotov

3. Lastnosti funkcij sinus in kosinus quadraticus

3.1. Zveze sinusa in kosinusa s sinus quadraticus in kosinus quadraticus

Osnovna zveza med funkcijama sinus in kosinus quadraticus, ki izhaja iz definicij 1 in 2, je

$$\mathrm{sinq}(\alpha) + \mathrm{cosq}(\alpha) = 1, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{10}$$

V splošnem pa velja zveza (prav tako izhajajoč iz definicij 1 in 2):

$$|\mathrm{sinq}(x)\,| + |\mathrm{cosq}(x)\,| = 1, x \in R. \tag{11}$$

Kako se sinq in coq izražata s funkcijama sin in cos, smo že izpeljali (glej (8) in (9)). Odgovorimo še na vprašanje, kako se funkciji sin in cos izražata s funkcijama sinus in kosinus quadraticus. Izhajamo iz zveze (6) in upoštevamo še nekaj znanih zvez, pa dobimo:

$$\mathrm{sinq}(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$$

$$\mathrm{sinq}(x)\big(\sin(x) + \cos(x)\big) = \sin(x)$$

$$\mathrm{sinq}(x)\sin(x) + \mathrm{sinq}(x)\cos(x) = \sin(x)$$

$$\sin(x) - \mathrm{sinq}(x)\sin(x) = \mathrm{sinq}(x)\cos(x)$$

$$\sin(x)\big(1 - \mathrm{sinq}(x)\big) = \mathrm{sinq}(x)\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)}\right)$$

$$\sin(x)\mathrm{cosq}(x) = \mathrm{sinq}(x)\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)}\right)$$

$$\sin^2(x)\mathrm{cosq}^2(x) = \mathrm{sinq}^2(x)\big(1 - \sin^2(x)\big)$$

$$\sin^2(x)\mathrm{cosq}^2(x) = \mathrm{sinq}^2(x) - \mathrm{sinq}^2(x)\sin^2(x)$$

$$\sin^2(x)\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)\sin^2(x) = \mathrm{sinq}^2(x)$$

$$\sin^2(x)\big(\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)\big) = \mathrm{sinq}^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{\mathrm{sinq}^2(x)}{\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)}$$

$$\sin(x) = \frac{\mathrm{sinq}(x)}{\sqrt{\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)}} \tag{12}$$

Predznaka funkcija sinus in sinus quadraticus se ujemata, tako da formula (12) velja za vsak $x \in R$.

Podobno dobimo zvezo za kosinus quadraticus:

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)}{\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)} - \frac{\mathrm{sinq}^2(x)}{\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)}}$$

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{cosq}^2(x)}{\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)}}$$

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{cosq}(x)}{\sqrt{\mathrm{cosq}^2(x) + \mathrm{sinq}^2(x)}} \tag{13}$$

Tudi formula (13) velja za vsak $x \in R$.

3.2. Ničle in ekstremi funkcij sinus in kosinus quadraticus

Iz definicije funkcij sinus in kosinus quadraticus ter iz formul (6) in (7) sklepamo, da imata funkciji sin ter sinq enake ničle, prav tako funkciji cos in cosq. Pri računskem dokazu pa moramo upoštevati, da sta funkcijska predpisa sestavljena iz štirih delov (glej (8) in (9)).

Na intervalih $k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ima sinq ničlo, cosq pa ne

$$\mathrm{sinq}(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = 0$$

$$\sin(x) = 0$$

$$x = k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$$

Na intervalih $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < \pi + k \cdot 2\pi$ sinq nima ničle, pač pa jo ima cosq

$$\mathrm{cosq}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = 0$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$$

Na intervalih $\pi + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ima sinq ničlo, cosq pa ne

$$\mathrm{sinq}(x) = \frac{-\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = 0$$

$$x = \pi + k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$$

Na intervalih $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < 2\pi + k \cdot 2\pi$ sinq nima ničle, pač pa jo ima cosq

$$\mathrm{cosq}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} = 0$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$$

Če povzamemo:

- sinus quadraticus ima ničle pri $x = k \cdot \pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$
- kosinus quadraticus ima ničle pri $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.

S podobnim sklepanjem dobimo, da se ekstremi sinusa in sinusa quadraticusa ujemajo, prav tako se ujemajo ekstremi kosinusa in kosinusa quadraticusa.

Sinus quadraticus ima maksimume pri $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$, minimume pa pri $x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.

Kosinus quadraticus ima maksimume pri $x = k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$, minimume pa pri $x = \pi + k \cdot 2\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Sodost in lihost funkcij sinus in kosinus quadraticus

V razdelkih 2.2 in 2.3 smo iz oblike grafov sklepali o lastnostih sodosti in lihosti funkcij sinus in kosinus quadraticus. Utemeljimo to še z računom.

Vzemimo funkcijo $\mathrm{sinq}\, x = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ na intervalih $k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$. Izračunajmo

$$\mathrm{sinq}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sin(-x) + \cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{-\sin(x) + \cos(x)} = \frac{-\sin x}{\cos x - \sin x} = -\,\mathrm{sinq}(x)$$

Primerjati moramo predpis na intervalih $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < 2\pi + k \cdot 2\pi$ (glej (8)).

Izračunajmo še $\mathrm{sinq}(-x)$ na intervalih $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \le x < \pi + k\cdot 2\pi$:

$$\mathrm{sinq}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sin(-x)-\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$$

Ker je predpis na intervalih $\pi + k\cdot 2\pi \le x < \frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$ enak $\frac{-\sin x}{\sin x+\cos x}$, velja torej

$\mathrm{sinq}(-x) = -\mathrm{sinq}(x)$. Torej je sinus quadraticus liha funkcija.

Podobno izračunamo za kosinus quadraticus.

Na intervalih $k\cdot 2\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$ je $\mathrm{cosq}(x) = \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$, zato je

$\mathrm{cosq}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)+\cos(-x)} = \frac{\cos(x)}{\cos(\mathrm{x})-\sin(x)}$, kar je funkcijski predpis te funkcije na intervalih $\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi \le x < 2\pi + k\cdot 2\pi$ (glej (9)).

Na intervalih $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \le x < \pi + k\cdot 2\pi$ je $\mathrm{cosq}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)-\cos(-x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$,

kar je predpis na intervalih $\pi + k\cdot 2\pi \le x < \frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$. Tako smo dokazali, da je kosinus soda funkcija.

3.4. Zveznost funkcij sinus in kosinus quadraticus

Trditev 1: *Funkciji sinus in kosinus quadraticus sta zvezni na celotnem definicijskem območju.*

Dokaz: Vzemimo funkcijo sinus quadraticus (glej predpis(8)). Funkcija $g(x) = \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ ni zvezna v točkah $\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi$, ki ne ležijo na intervalih $k\cdot 2\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$. Funkcija $h(x) = \frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$ pa ni zvezna v točkah $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$, ki pa tudi ne ležijo na intervalih $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \le x < \pi + k\cdot 2\pi$. Preveriti je potrebno le, ali je sinq zvezna pri $x = \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$. Ker je $lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 1 = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, sledi, da je sinq v točkah $x = \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$ zvezna. Na enak način dokažemo zveznost v točkah $x = \frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$. Ker je $\mathrm{cosq}(x) = \mathrm{sinq}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, je zvezna tudi funkcija cosq.

$q.e.d.$

4. Adicijski izreki funkcij sinus in kosinus quadraticus

4.1. Teoretični dokaz

$$\mathrm{cosq}\,(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\ \cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\sin\beta)}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\sin\beta)}}{\dfrac{\cos\alpha\ \cdot\cos\beta}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\sin\beta)}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\sin\beta)}+\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\sin\beta)}-\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+\sin\beta)}}$$

$$=\frac{\mathrm{cosq}\,\alpha\cdot\mathrm{cosq}\,\beta+\mathrm{sinq}\,\alpha\cdot\mathrm{sinq}\,\beta}{\mathrm{cosq}\,\alpha\ \cdot\mathrm{cosq}\,\beta+\mathrm{sinq}\,\alpha\cdot\mathrm{sinq}\,\beta+\mathrm{sinq}\,\alpha\cdot\mathrm{cosq}\,\beta-\mathrm{cosq}\,\alpha\cdot\mathrm{sinq}\,\beta}$$

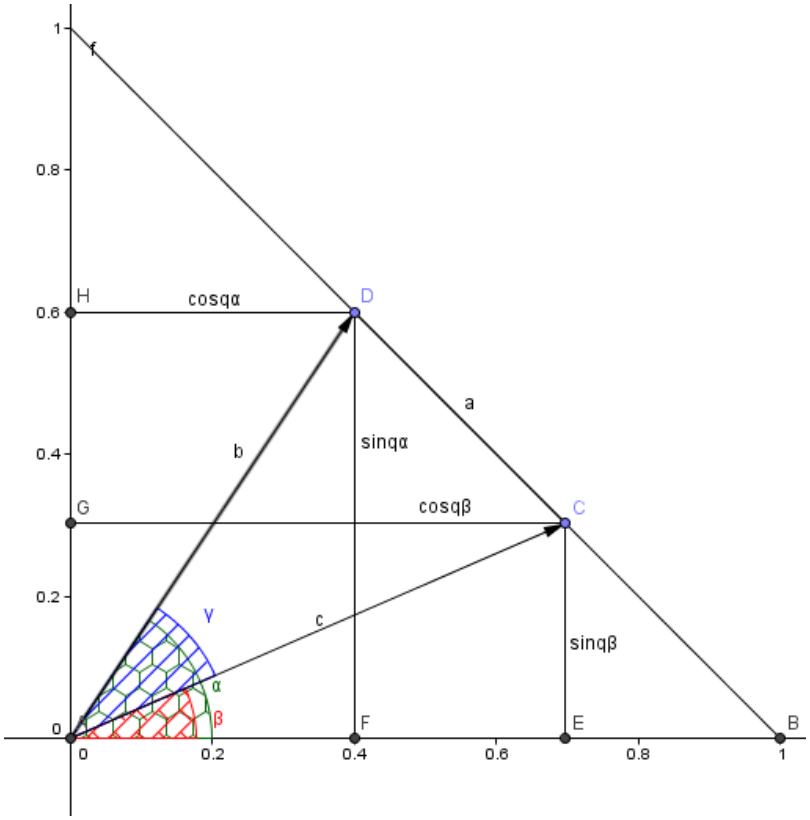
Podobno in z uporabo zvez dobimo še ostale adicijske izreke:

$$\mathrm{cosq}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta\mp\mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta}{\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta\mp\mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta+\ \mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta\pm\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta}$$

$$\mathrm{sinq}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta\pm\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta}{\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta\mp\mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta+\ \mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta\pm\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta}$$

Izreki za tangens quadraticus pa so enaki izrekom za tangens.

4.2. Dokaz z uporabo kosinusnega izreka



Slika 7: K izpeljavi adicijskega izreka za cosq(α-β) s pomočjo kosinusnega izreka

Zapišimo Pitagorov izrek, po katerem izračunamo dolžino daljice DC (glej sliko 7)

$$|DC| = \sqrt{(\mathrm{cosq}(\beta) - \mathrm{cosq}(\alpha))^2 + (\mathrm{sinq}(\alpha) - \mathrm{sinq}(\beta))^2}$$

Zapišimo tudi kosinusni izrek za trikotnik OCD:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\gamma)$$

Stranico a predstavlja daljica DC, dolžini stranic b in c izrazimo s Pitagorovim izrekom, kot γ pa je enak kotu α-β. Kot že vemo velja:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{cosq}(\alpha)}{\sqrt{(\mathrm{cosq}(\alpha)^2 + \mathrm{sinq}(\alpha)^2}}$$

zato lahko zapišemo:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{cosq}(\alpha - \beta)}{\sqrt{\mathrm{cosq}(\alpha - \beta)^2 + (1 - \mathrm{cosq}(\alpha - \beta))^2}}$$

Če izenačimo Pitagorov in kosinusni izrek za daljico DC (oziroma stranico a) in v izreka vstavimo funkcije, dobimo:

$$(\mathrm{cosq}(\beta)-\mathrm{cosq}(\alpha))^2+(\mathrm{sinq}(\alpha)-\mathrm{sinq}(\beta))^2 = \mathrm{cosq}(\alpha)^2+\mathrm{sinq}(\alpha)^2+\mathrm{cosq}(\beta)^2+\mathrm{sinq}(\beta)^2 - 2\sqrt{\mathrm{sinq}(\alpha)^2+\mathrm{cosq}(\alpha)^2}\sqrt{\mathrm{sinq}(\beta)^2+\mathrm{cosq}(\beta)^2} \cdot \frac{\mathrm{cosq}(\alpha-\beta)}{\sqrt{\mathrm{cosq}(\alpha-\beta)^2+(1-\mathrm{cosq}(\alpha-\beta))^2}}$$

Za lažje računanje zamenjamo:

sinq α	a
sinq β	b
cosq α	c
cosq β	d
cosq(α+β)	u

Upoštevamo nove označbe in prepišimo:

$$(d-c)^2+(a-b)^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}\frac{u}{\sqrt{u^2+(1-u)^2}}$$

Ko člena na levi strani enačbe kvadriramo in odštejemo kar je enakega na obeh straneh ter enačbo nato kvadriramo dobimo:

$$a^2b^2+c^2d^2+2abcd=(a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2)\frac{u^2}{2u^2-2u+1}$$

Enačbo pretvorimo v obliko $au^2+bu+c=0$

$$u^2(a^2b^2+c^2d^2-a^2d^2-c^2b^2+4abcd)+u(2a^2b^2+2c^2d^2+4abcd)\ +(a^2b^2+c^2d^2+2abcd)\ =0$$

Poiščemo diskriminanto: $D=b^2-4ac$; dobimo:

$$D=4(cd+ab)^2(cb-ad)^2$$

Oziroma:

$$\sqrt{D}=2(cd+ab)(cb-ad)$$

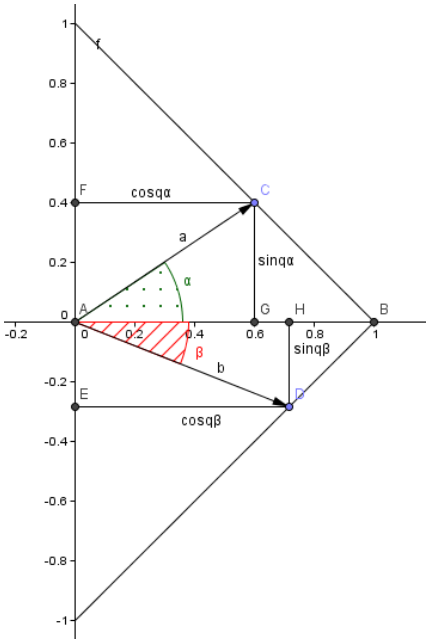
Vstavimo v enačbo za ničle $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ in dobimo:

$$u=\frac{cd+ab}{ad-cb+cd+ab}$$

V enačbo vstavimo funkcije namesto črk in dobimo:

$$\mathrm{cosq}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta+\mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta}{\mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta-\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta+\mathrm{cosq}\,\alpha\,\mathrm{cosq}\,\beta+\mathrm{sinq}\,\alpha\,\mathrm{sinq}\,\beta}$$

4.3. Dokaz z uporabo vektorskega računa



Slika 8: K izpeljavi adicijskega izreka cosq(α+β) s pomočjo vektorskega računa

Označimo (glej sliko 8) in izračunajmo:

$$\vec{a} = (\operatorname{cosq}\alpha\,, \operatorname{sinq}\alpha)$$

$$\vec{b} = (\operatorname{cosq}\beta\,, -\operatorname{sinq}\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cosq}(\alpha+\beta)}{\sqrt{\operatorname{cosq}^2(\alpha+\beta)+\operatorname{sinq}^2(\alpha+\beta)}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \operatorname{cosq}\alpha\operatorname{cosq}\beta - \operatorname{sinq}\alpha\operatorname{sinq}\beta$$

$$\sqrt{\operatorname{cosq}^2\alpha+\operatorname{sinq}^2\alpha}\cdot\sqrt{\operatorname{cosq}^2\beta+\operatorname{sinq}^2\beta}\cdot\frac{\operatorname{cosq}(\alpha+\beta)}{\sqrt{\operatorname{cosq}^2(\alpha+\beta)+\operatorname{sinq}^2(\alpha+\beta)}} = \operatorname{cosq}\alpha\operatorname{cosq}\beta - \operatorname{sinq}\alpha\operatorname{sinq}\beta$$

Za lažje računanje zamenjamo:

sinq α	a
sinq β	b
cosq α	c
cosq β	d
cosq(α+β)	u

Enačbo kvadriramo in upoštevamo, da velja: $\operatorname{sinq}\alpha = 1 - \operatorname{cosq}\alpha$; tako dobimo:

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2)\frac{u^2}{1-2u+2u^2}=(cd-ab)^2$$

Enačbo pretvorimo v obliko $au^2+bu+c=0$

$$u^2\big((a^2+c^2)(b^2+d^2)-2(cd-ab)^2\big)+u(2(cd-ab)^2)-(cd-ab)^2=0$$

Poiščemo diskriminanto: $D=b^2-4ac$; dobimo:

$$D=4(cd-ab)^2(cb+ad)^2$$

Oziroma:

$$\sqrt{D}=2(cd-ab)(cb+ad)$$

Vstavimo v enačbo za ničle $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ in dobimo:

$$u=\frac{cd-ab}{ad+cb+cd-ab}$$

V enačbo vstavimo funkcije namesto črk in dobimo:

$$\operatorname{cosq}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cosq}\alpha\operatorname{cosq}\beta-\operatorname{sinq}\alpha\operatorname{sinq}\beta}{\operatorname{sinq}\alpha\operatorname{cosq}\beta+\operatorname{cosq}\alpha\operatorname{sinq}\beta+\operatorname{cosq}\alpha\operatorname{cosq}\beta-\operatorname{sinq}\alpha\operatorname{sinq}\beta}$$

4.4. Sinus in kosinus quadraticus dvojnih in polovičnih kotov

Da dobimo funkcije dvojnega kota, upoštevamo v adicijskih izrekih, da sta kota α in β enaka, tako dobimo:

$$\operatorname{cosq}2\alpha=\frac{\operatorname{cosq}\alpha-\operatorname{sinq}\alpha}{\operatorname{cosq}\alpha-\operatorname{sinq}\alpha+2\operatorname{cosq}\alpha\operatorname{sinq}\alpha}$$

ter:

$$\operatorname{sinq}2\alpha=\frac{2\operatorname{sinq}\operatorname{cosq}\alpha}{\operatorname{cosq}\alpha-\operatorname{sinq}\alpha+2\operatorname{cosq}\operatorname{sinq}\alpha}$$

Kotne funkcije polovičnega kota izpeljemo preko kotnih funkcij polovičnega kota za tangens. Velja:

$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Kosinus quadraticus s tangensom zapišemo kot:

$$\operatorname{cosq}\alpha=\frac{1}{1+\tan\alpha}$$

Zato velja:

$$\operatorname{cosq}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Če enačbo preuredimo in po znanih formulah sinus in kosinus zamenjamo s sinus quadraticus in kosinus quadraticus dobimo:

$$\operatorname{cosq}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sinq}\alpha}{\operatorname{sinq}\alpha - \operatorname{cosq}\alpha + \sqrt{\operatorname{sinq}^2\alpha + \cos^2\alpha}}$$

Iz zveze:

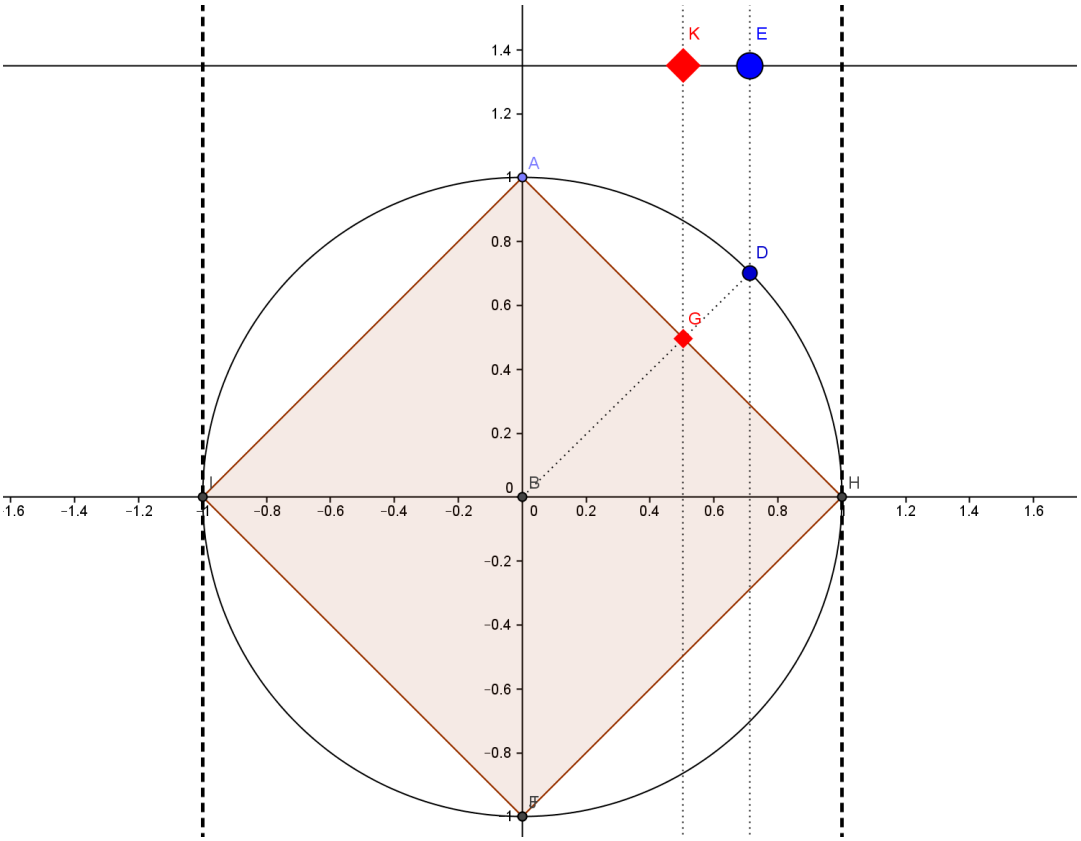
$$\operatorname{sinq}\alpha = 1 - \operatorname{cosq}\alpha$$

nato sledi:

$$\operatorname{sinq}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{\operatorname{sinq}^2\alpha + \cos^2\alpha} - \operatorname{cosq}\alpha}{\operatorname{sinq}\alpha - \operatorname{cosq}\alpha + \sqrt{\operatorname{sinq}^2\alpha + \cos^2\alpha}}$$

5. Primerjava nihanj sinusa in sinusa quadraticus

S funkcijo $f(x) = \sin(x)$ opišemo na primer odmik od ravnovesne lege pri nihanju matematičnega nihala. Hitrost gibanja je največja ob prehodu skozi ravnovesno lego, v skrajnih legah pa je hitrost enaka 0. Zanimalo nas je, kako bi se »obnašalo matematično nihalo«, če bi bil odmik od ravnovesne lege podvržen funkciji $f(x) = \operatorname{sinq}(x)$. Na sliki 9 sta prikazani obe »nihali«, ki nihata sočasno. Točka D enakomerno kroži (glej sliko 9), točka E prikazuje sinusno nihanje. Točka G leži na presečišču enotskega kvadrata in premičnega kraka kota *HBD*, točka K pa sledi »nihanju sinus quadraticus. Posnetek animacije je dostopen na naslovu: https://www.youtube.com/watch?v=RK0lV2IPXao. V skrajnih legah ima to nihanje največjo hitrost, tam pride do prožnega odboja. Potem se nihanje upočasni in pred ravnovesno lego hitrost znova naraste. Prehod skozi ravnovesno lego je sočasen, prav tako tudi položaj v skrajnih legah.



Slika 9: Primerjava sinusnega nihanja in nihanja sinus quadraticus

6. Inverzne funkcije funkcij sinus in kosinus quadraticus

Inverzno funkcijo lahko priredimo le bijektivnim funkcijam. Funkcija

$$f: R \to R; f(x) = \mathrm{sinq}(x)$$

ni bijektivna, saj ni niti injektivna niti surjektivna. Injektivna ni, ker ima enake vrednosti pri različnih kotih, surjektivna pa ni, ker se njena zaloga vrednosti ne ujema z množico R. Zato omejimo njeno definicijsko območje, za drugo množico pa vzamemo njeno zalogo vrednosti. Funkcija

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]; f(x) = \mathrm{sinq}(x)$$

je bijektivna, zato obstaja inverzna funkcija:

$$f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Inverzno funkcijo bomo imenovali arcus sinus quadraticus in jo označili z oznako arcsinq. Graf je narisan na sliki 10. Izpeljimo njen predpis.

$$f(x) = \mathrm{sinq}(x)$$

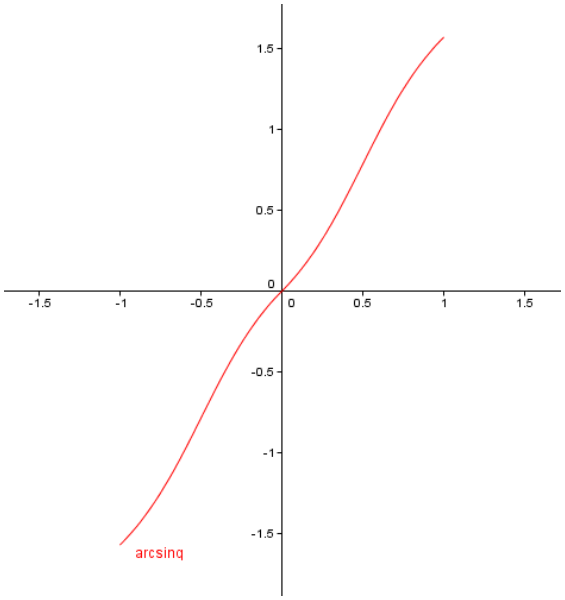
$$y = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = \frac{\tan(x)}{1 + \tan(x)}$$

$$x = \frac{\tan(y)}{1 + \tan(y)}$$

$$\tan(y) = \frac{x}{1 - x}$$

$$y = \arctan\frac{x}{1 - x}$$

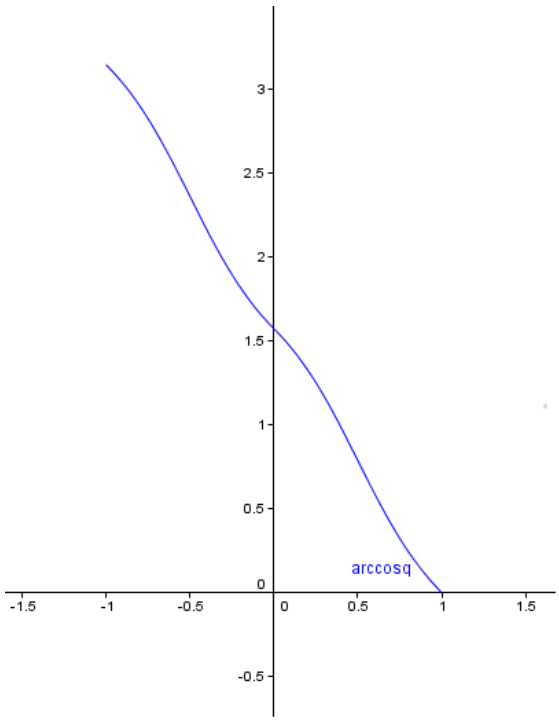
$$\mathrm{arcsinq}(x) = \arctan\frac{x}{1 - x}$$



Slika 10: Graf inverzne funkcije k funkciji sinus quadarticus

Podobno ravnamo pri funkciji kosinus quadraticus. Ker funkcija $f: R \to R; f(x) = \mathrm{cosq}(x)$ ni bijektivna, omejimo njeno definicijsko območje, za drugo množico pa vzamemo njeno zalogo vrednosti. Funkcija $f: [0, \pi] \to [-1,1]; f(x) = \mathrm{cosq}(x)$ je bijektivna, zato obstaja inverzna funkcija: $f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi]$. Izpeljava je podobna, graf je na sliki 11.

$$\mathrm{arccosq(x)} = \arctan \frac{1-x}{x}$$



Slika 11: Graf inverzne funkcije k funkciji kosinus quadarticus

7. Prvi odvod sinusa in kosinusa quadraticus

7.1. Odvod sinusa quadraticus

Poiščimo prvi odvod. Odvod sinq po posameznih intervalih:

1. $x \in \left[k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

2. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$$

3. $x \in \left[\pi + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{-\sin x}{\sin x + \cos x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = -\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

4. $x \in, \left[\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

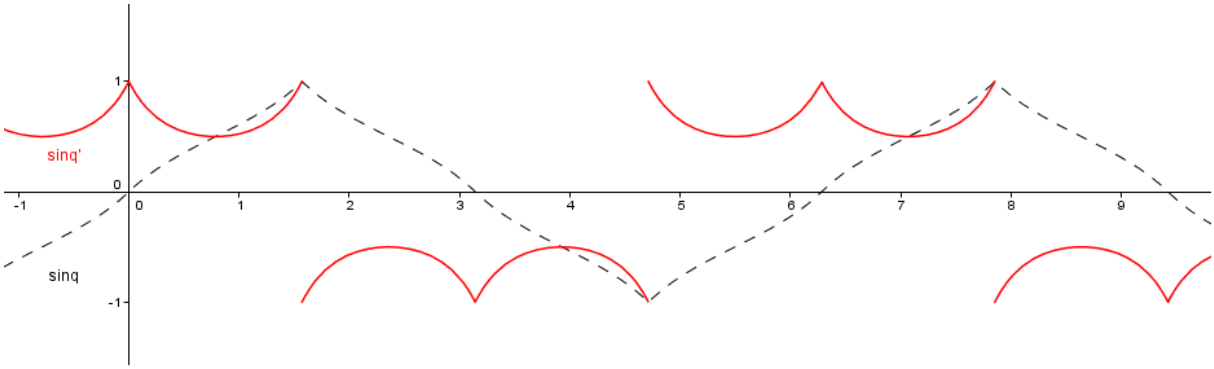
$$\left(\frac{\sin x}{\cos x - \sin x}\right)' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\cos x - \sin x)^2} = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}$$

Zapišimo odvod $\text{sinq}'(x)$ s stopničasto funkcijo, graf pa je na sliki 12.

$$\text{sinq}'\, x = \begin{cases} \dfrac{1}{(\cos x + \sin x)^2}, & k \cdot 2\pi \le x < \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ -\dfrac{1}{(\sin x - \cos x)^2}, & \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi \\ -\dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}, & \pi + k \cdot 2\pi \le x < \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{1}{(\cos x - \sin x)^2}, & \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi < x < 2\pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Enačba $\sin\mathrm{q}'x = 0$ nima rešitve na nobenem intervalu, torej funkcija $\sin\mathrm{q}\, x$ nima stacionarnih točk znotraj posameznih intervalov.

Posebej pa si moramo ogledati funkcijo $\sin\mathrm{q}\, x$ v točkah $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 1\right)$ ter $\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, -1\right)$. V točkah $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 1\right)$ funkcija sinq ni odvedljiva, saj je $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \sin\mathrm{q}'x = 1$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin\mathrm{q}'x = -1$. V teh točkah pa ima funkcija $\sin\mathrm{q}\, x$ lokalne maksimume. Prav tako ni odvedljiva v točkah $\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, -1\right)$, ima v teh točkah lokalne minimume.



Slika 12: Graf prvega odvoda funkcije sinus quadarticus

7.2. Odvod kosinusa quadraticus

Izračunajmo odvod cosq po posameznih intervalih:

1. $x \in \left[k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

2. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$$

3. $x \in \left[\pi + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

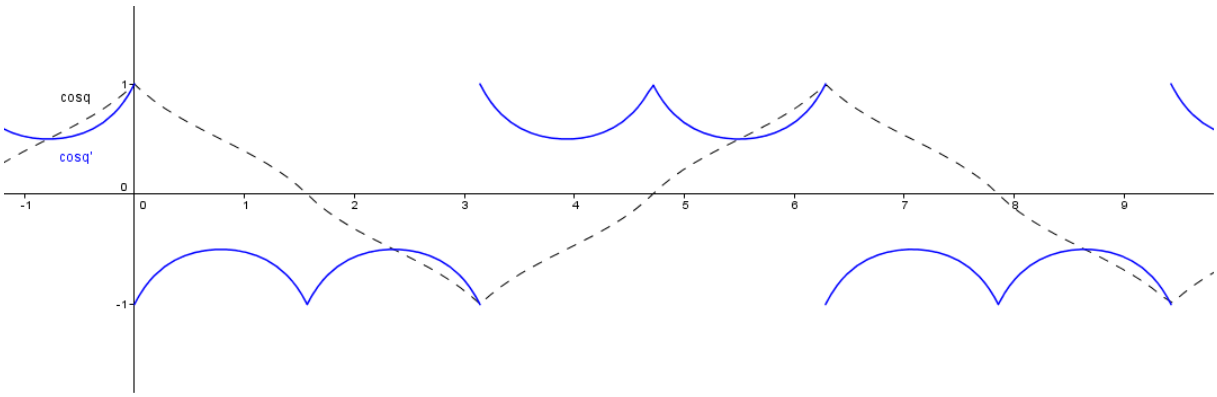
$$\left(-\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)'=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

4. $x\in\left[\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi, 2\pi+k\cdot 2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$

$$\left(\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\right)'=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{1}{(\cos x-\sin x)^2}$$

Zapišimo odvod $\mathrm{cosq}'(x)$ s stopničasto funkcijo, graf je na sliki 13.

$$\mathrm{cosq}'\,x=\begin{cases}-\dfrac{1}{(\cos x+\sin x)^2}, & k\cdot 2\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\\ -\dfrac{1}{(\sin x-\cos x)^2}, & \dfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\le x<\pi+k\cdot 2\pi\\ \dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}, & \pi+k\cdot 2\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi\\ \dfrac{1}{(\cos x-\sin x)^2}, & \dfrac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi\le x<2\pi+k\cdot 2\pi\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}$$



Slika 13: Graf prvega odvoda funkcije kosinus quadarticus

Enačba $\mathrm{cosq}'x=0$ nima rešitve na nobenem intervalu, torej funkcija $\mathrm{cosq}\,x$ nima stacionarnih točk znotraj posameznih intervalov.

Posebej pa si moramo ogledati funkcijo $\mathrm{cosq}\,x$ v točkah $(k\cdot 2\pi, 1)$ ter $(\pi+k\cdot 2\pi, -1)$. Iz podobnih razlogov kot smo pokazali pri funkciji sinus quadraticus tudi funkcija kosinus quadraticus v teh točkah ni odvedljiva. V točkah $(k\cdot 2\pi, 1)$ ima funkcija $\mathrm{cosq}\,x$ lokalne maksimume, v točkah $(\pi+k\cdot 2\pi, -1)$ pa lokalne minimume.

7.3. Zveze med prvimi odvodi

Trditev 2: Za prva odvoda funkcij sinus in kosinus quadraticus veljata naslednji zvezi:

$\mathrm{sinq}'(x) + \mathrm{cosq}'(x) = 0$ za $x \in \left(k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) \cup \left(\pi + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ter

$\mathrm{sinq}'(x) = \mathrm{cosq}'(x)$ za $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi,\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Dokaz: Zvezi v trditvi 2 sledita neposredno iz funkcijskih predpisov funkcij $\mathrm{sinq}'(x)$ in $\mathrm{cosq}'(x)$.

Trditev 3: Za funkciji $\mathrm{sinq}(x)$ in $\mathrm{cosq}(x)$ veljata zvezi:

$\mathrm{sinq}^2(x) + \mathrm{cosq}^2(x) = \mathrm{sinq}'(x)$ v I. kvadrantu

$\mathrm{sinq}^2(x) + \mathrm{cosq}^2(x) = -\mathrm{sinq}'(x)$ v II. kvadrantu,

$\mathrm{sinq}^2(x) + \mathrm{cosq}^2(x) = -\mathrm{sinq}'(x)$ v III. kvadrantu,

$\mathrm{sinq}^2(x) + \mathrm{cosq}^2(x) = \mathrm{sinq}'(x)$ v IV. kvadrantu,

Dokaz: Naj bo $x \in \left[k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$ (prvi kvadrant). Izračunajmo:

$$\mathrm{sinq}^2(x) + \mathrm{cosq}^2(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\right)^2 + \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\right)^2 = \frac{1}{(\sin(x)+\cos(x))^2} = \mathrm{sinq}'(x)$$

Podobno izračunamo še za ostale kvadrante.

q.e.d.

8. Drugi odvod

Drugi odvod sinq po posameznih intervalih:

1. $x \in \left[k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}\right)' = \frac{-2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^4} = \frac{2(\sin x - \cos x)}{(\cos x + \sin x)^3}$$

2. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(-\frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}\right)' = \frac{2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^4} = \frac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^3}$$

3. $x \in \left[\pi + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

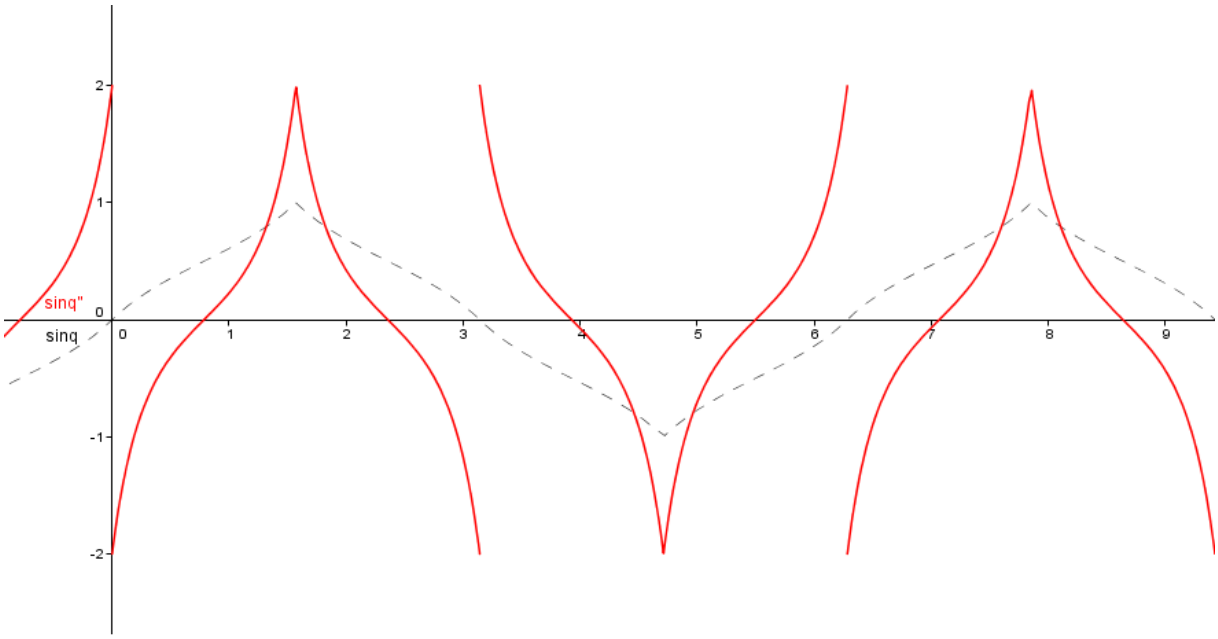
$$\left(-\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\right)' = \frac{2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^4} = \frac{2(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^3}$$

4. $x \in \left[\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}\right)' = \frac{-2(\cos x - \sin x)(-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^4} = \frac{2(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^3}$$

Zapišimo drugi odvod $\text{sinq}''(x)$ s stopničasto funkcijo, graf je na sliki 14.

$$\text{sinq}''\, x = \begin{cases} \dfrac{2(\sin x - \cos x)}{(\cos x + \sin x)^3}, & k \cdot 2\pi \le x < \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^3}, & \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \le x < \pi + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{2(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^3}, & \pi + k \cdot 2\pi \le x < \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{2(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^3}, & \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \le x < 2\pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Slika 14: Graf drugega odvoda funkcije sinus quadarticus

Drugi odvod cosq po posameznih intervalih:

1. $x \in \left[k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(-\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}\right)' = \frac{2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^4} = \frac{2(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^3}$$

2. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(-\frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}\right)' = \frac{2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^4} = \frac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^3}$$

3. $x \in \left[\pi + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

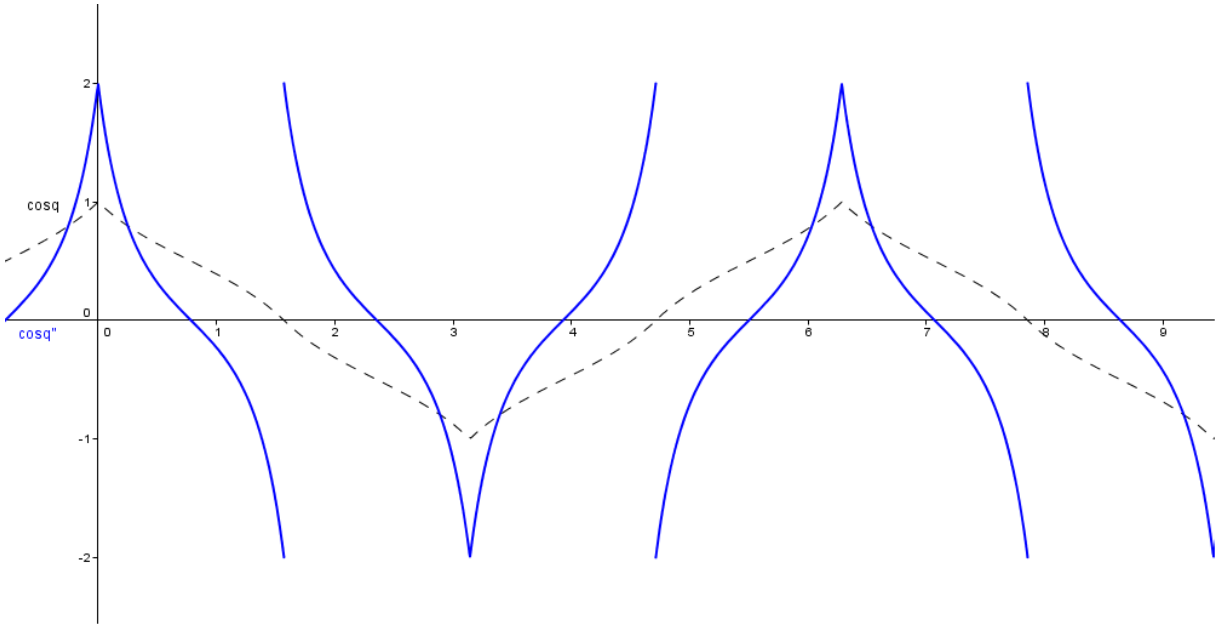
$$\left(\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\right)' = \frac{-2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^4} = \frac{2(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3}$$

4. $x \in \left[\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}\right)' = \frac{-2(\cos x - \sin x)(-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^4} = \frac{2(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^3}$$

Zapišimo drugi odvod $\text{cosq}''(x)$ s stopničasto funkcijo, graf je na sliki 15.

$$\text{cosq}''\,x = \begin{cases} \dfrac{2(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^3}, & k \cdot 2\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^3}, & \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < \pi + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{2(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3}, & \pi + k \cdot 2\pi \leq x < \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ \dfrac{2(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^3}, & \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < 2\pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Slika 15: Graf drugega odvoda funkcije kosinus quadarticus

Prevoji sinq

1. $x \in \left[k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\sin x - \cos x)}{(\cos x + \sin x)^3} = 0$$

$\sin x - \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$\tan x = 1$

$x = \arctan 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^3} = 0$$

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$\tan x = -1$

$x = \arctan(-1)$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left[\pi + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^3} = 0$$

$\cos x - \sin x = 0$

$\sin x = \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$\tan x = 1$

$x = \arctan 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{5\pi}{4} + k\pi, -\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left[\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^3} = 0$$

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$\tan x = -1$

$x = \arctan(-1)$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{7\pi}{4} + k\pi, -\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

Prevoji cosq

1. $x \in \left[k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^3} = 0$$

$\cos x - \sin x = 0$

$\sin x = \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$\tan x = 1$

$x = \arctan 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

2. $x \in \left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^3} = 0$$

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$\tan x = -1$

$x = \arctan - 1$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

3. $x \in \left[\pi + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3} = 0$$

$\sin x - \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$\tan x = 1$

$x = \arctan 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{5\pi}{4} + k\pi, -\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

4. $x \in \left[\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 2\pi + k \cdot 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^3} = 0$$

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$\tan x = -1$

$x = \arctan - 1$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

Prevoji so v točkah: $\left(\frac{7\pi}{4} + k\pi, \frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$

Opomba: V naštetih točkah so res prevoji (in ne morebiti ekstremi), ker drugi odvod tam spremeni predznak, kar je razvidno iz slik 14. in 15.

9. Nedoločena integrala funkcij sinus in kosinus quadraticus

9.1. Izračun nedoločenega integrala funkcije sinus quadraticus

Na intervalih $k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{sinq}(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$, zato je

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sinq}(x)dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int 1\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} ln|\sin x + \cos x| + C\end{aligned}$$

Na intervalih $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{sinq}(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$, zato je

$$\int \operatorname{sinq}(x)dx = \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} ln|\cos x - \sin x| + C$$

Na intervalih $\pi + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{sinq}(x) = \frac{-\sin x}{\sin x + \cos x}$, zato je

$$\int \operatorname{sinq}(x)dx = \int \frac{-\sin x}{\sin x + \cos x} dx = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} ln|\cos x + \sin x| + C$$

Na intervalih $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < 2\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{sinq}(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$, zato je

$$\int \operatorname{sinq}(x)dx = \int \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} dx = -\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} ln|\cos x - \sin x| + C$$

9.2. Izpeljava nedoločenega integrala funkcije kosinus quadraticus

Na intervalih $k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{cosq}(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$, zato je

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosq}(x)dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\, dx \\ &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int 1\ dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}ln|\sin x + \cos x| + c\end{aligned}$$

Podobno dobimo še na ostalih intervalih (kvadrantih):

Na intervalih $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{cosq}(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$, zato je

$$\int \operatorname{cosq}(x)dx = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}ln|\cos x - \sin x| + C$$

Na intervalih $\pi + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{cosq}(x) = \frac{-\cos x}{\sin x + \cos x}$, zato je

$$\int \operatorname{cosq}(x)dx = \int \frac{-\cos x}{\sin x + \cos x}dx = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ln|\cos x + \sin x| + C$$

Na intervalih $\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \leq x < 2\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ je $\operatorname{cosq}(x) = \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$, zato je

$$\int \operatorname{cosq}(x)dx = \int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ln|\cos x - \sin x| + C$$

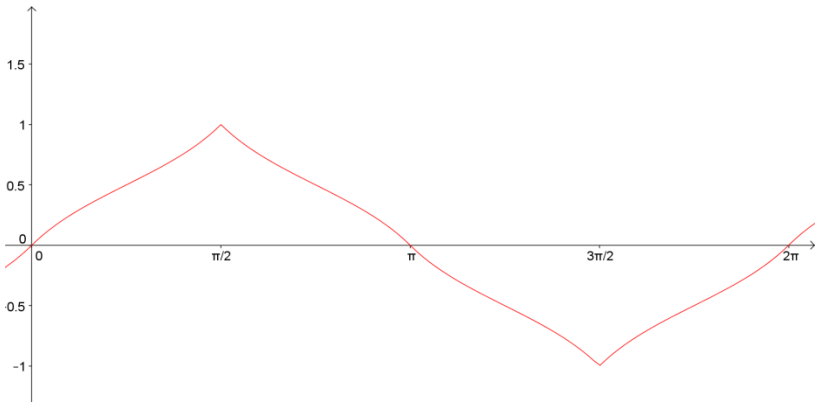
Opazili smo:

- vsota nedoločenih integralov v I. kvadrantu in razlika nedoločenih integralov sinusa in kosinusa quadraticus v II. kvadrantu enaka $x + D$ ter

- vsota nedoločenih integralov v III. kvadrantu in razlika nedoločenih integralov sinusa in kosinusa quadraticus v IV. kvadrantu enaka $-x + D$.

9.3. Ploščina

Izračunajmo ploščino omejenega lika, ki ga oklepa graf funkcije sinus quadraticus z abscisno osjo na intervalu $x \in [0, \pi]$ (slika 16).



Slika 16: K izračunu ploščine med grafom sinus quadarticus in abscisno osjo

$$\int_0^{\pi} \mathrm{sinq}(x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sinq}(x)dx = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ln|\sin x + \cos x|\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Rezultat je zanimiv, saj kaže na to, da je graf funkcije sinus quadraticus na intervalu $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ »ukrivljen simetrično«. To hipotezo preverimo z izračunom prvega odvoda:

$$\mathrm{sinq}'(x) = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} \qquad \mathrm{sinq}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$

Za druga odvoda velja, da sta si nasprotna:

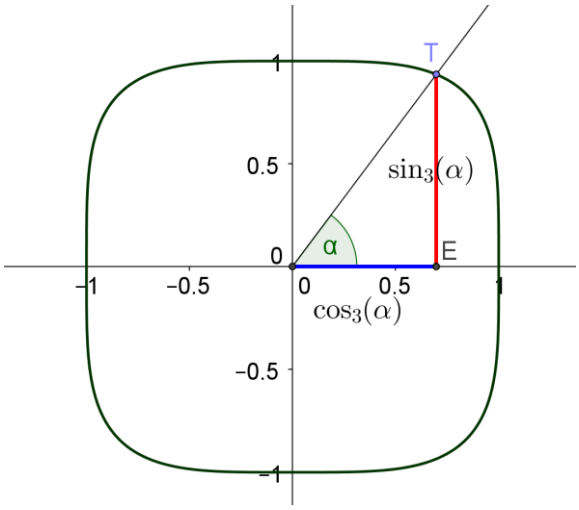
$$\mathrm{sinq}''(x) = \frac{2(\sin x - \cos x)}{(\cos x + \sin x)^3} \qquad \mathrm{sinq}''\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{2(\sin x - \cos x)}{(\cos x + \sin x)^3}$$

Pokazali smo, da krivulja $y = \mathrm{sinq}(x)$ razdeli pravokotnik $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1]$ natanko na polovico.

10. Posplošitev kotnih funkcij na enotski krivulji $|x|^n + |y|^n = 1, n \in \mathbb{N}$

10.1. Kotne funkcije na krivulji $|x|^3 + |y|^3 = 1$

Podobno kot pri izpeljavi cosq in sinq naredimo tudi izpeljave za sinus in kosinus, ki so definirani na enotski krivulji $|x|^3 + |y|^3 = 1$. Te funkcijske predpise označimo z $\cos_3(x)$ in $\sin_3(x)$.



Slika 17: Definicija kotnih funkcij $\cos_3(\alpha)$ in $\sin_3(\alpha)$.

Enačba obravnavane krivulje v I. kvadrantu (glej sliko 17) je $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$. Točka T je točka na presečišču premičnega kraka kota α in obravnavane krivulje. Njene koordinate so $\mathrm{T}(\cos_3(\alpha), \sin_3(\alpha))$.

Naj bo točka $\mathrm{E}(x, 0)$. Abscisa x je seveda enaka $\cos_3(\alpha)$. Točka T ima zato koordinati $T(x, y) = T(x, \sqrt[3]{1 - x^3})$. Poiščimo zvezo med x in kotom α. Zapišimo običajni tan(α):

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$

od tu izrazimo x:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$$

$$x\tan(\alpha) = \sqrt[3]{1 - x^3}$$

$$x^3\tan^3(\alpha) = 1 - x^3$$

$$x^3 + x^3\tan^3(\alpha) = 1$$

$$x^3\left(1 + \tan^3(\alpha)\right) = 1$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\tan^3(\alpha)}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{\sin^3(\alpha)}{\cos^3(\alpha)}}}$$

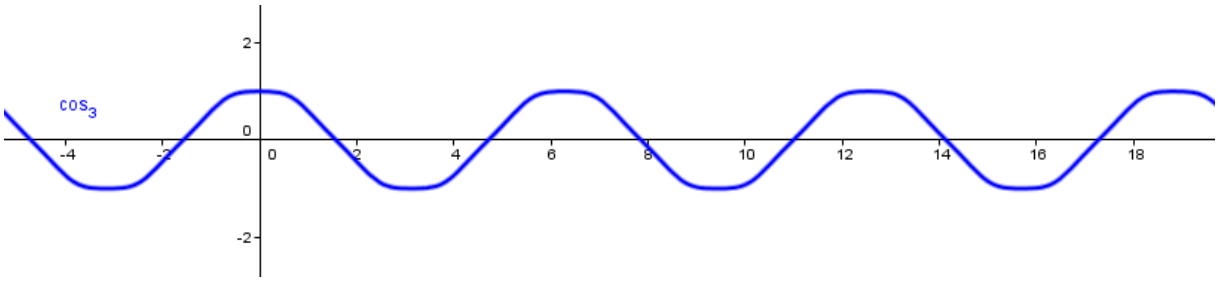
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{\cos^3(\alpha)+\sin^3(\alpha)}{\cos^3(\alpha)}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{\cos^3(\alpha)}{\cos^3(\alpha)+\sin^3(\alpha)}}$$

Ker smo z x označili absciso točke E, ki je tudi $\cos_3(x)$, je potem:

$$\cos_3(x) = \sqrt[3]{\frac{\cos^3(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}}$$

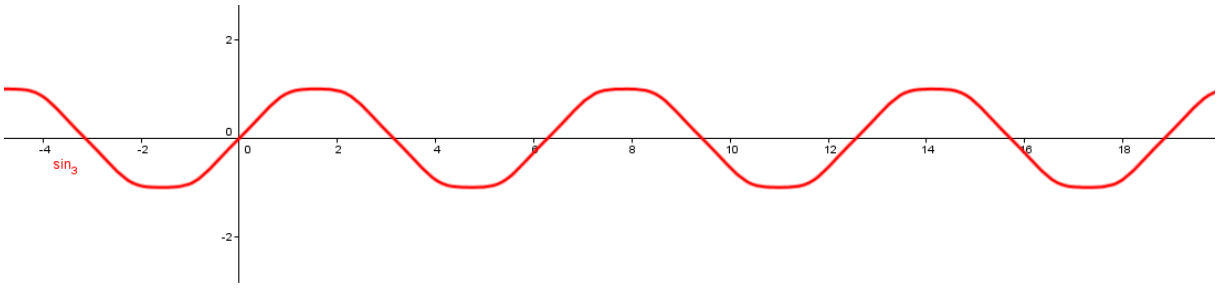
Njuna grafa sta na slikah 18. in 19.



Slika 18: Graf funkcije $\mathbf{f}(x) = \cos_3(x)$

Podobno dobimo, da je

$$\sin_3(x) = \sqrt[3]{\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)+\sin^3(x)}}$$



Slika 19: Graf funkcije $\mathbf{f}(x) = \mathbf{sin}_3(x)$

10.2. Kotne funkcije na krivulji $x^4 + y^4 = 1$

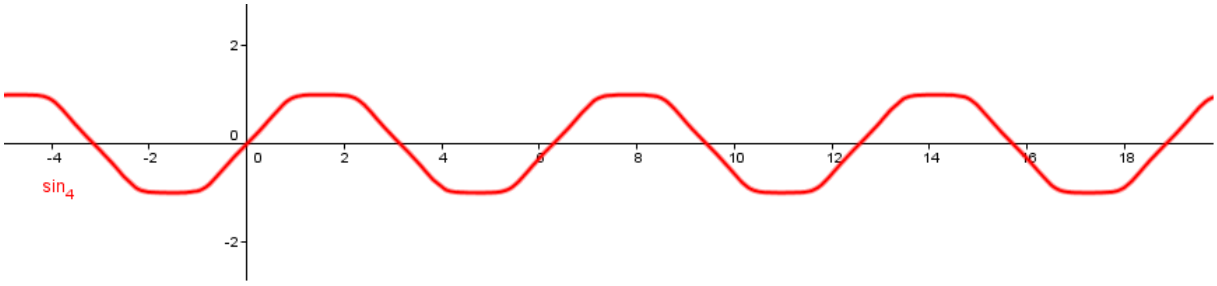
Na enak način kot v razdelku 10.1. izpeljemo funkcijske predpise za sinus in kosinus, ki sta definirani na enotski krivulji $|x|^4 + |y|^4 = 1$. Označili jih bomo z $\cos_4(x)$ ter $\sin_4(x)$. Tako dobimo

$$\cos_4(x) = \sqrt[4]{\frac{\cos^4(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)}}$$

ter

$$\sin_4(x) = \sqrt[4]{\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)}}$$

Graf funkcije f s predpisom $f(x) = \sin_4(x)$ je na sliki 20. V primerjavi z grafom $f(x) = \sin_3(x)$ je »nekoliko bolj oglat«.



Slika 20: Graf funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{sin}_4(x)$

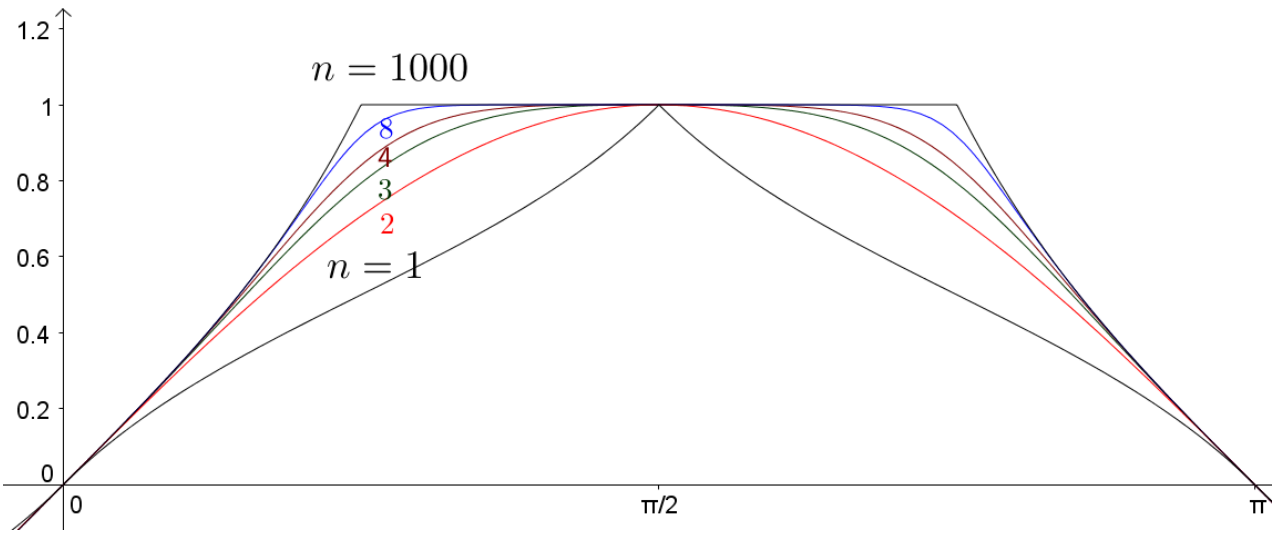
10.3. Posplošitev definicije kotnih funkcij na krivulji $|x|^n + |y|^n = 1$

Idejo iz razdelkov 10.1. ter 10.2 posplošimo. Na podoben način izpeljemo funkcijske predpise za »sinus« in »kosinus«, ki sta definirana na enotski krivulji $|x|^n + |y|^n = 1$. Označili ju bomo z $f(x) = \sin_n(x)$ ter $f(x) = \cos_n(x)$.[2] Tako dobimo funkcijska predpisa:

$$\sin_n(x) = \sqrt[n]{\frac{\sin^n(x)}{\cos^n(x)+\sin^n(x)}} \tag{14}$$

$$\cos_n(x) = \sqrt[n]{\frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x)+\sin^n(x)}} \tag{15}$$

Običajna sinus in kosinus na enotski krožnici dobimo kot posebna primera formul (14) in (15) za n=2, sinus in kosinus quadraticus pa za n=1. Na sliki 21 so prikazani grafi za n =2, 3, 4 in 8.

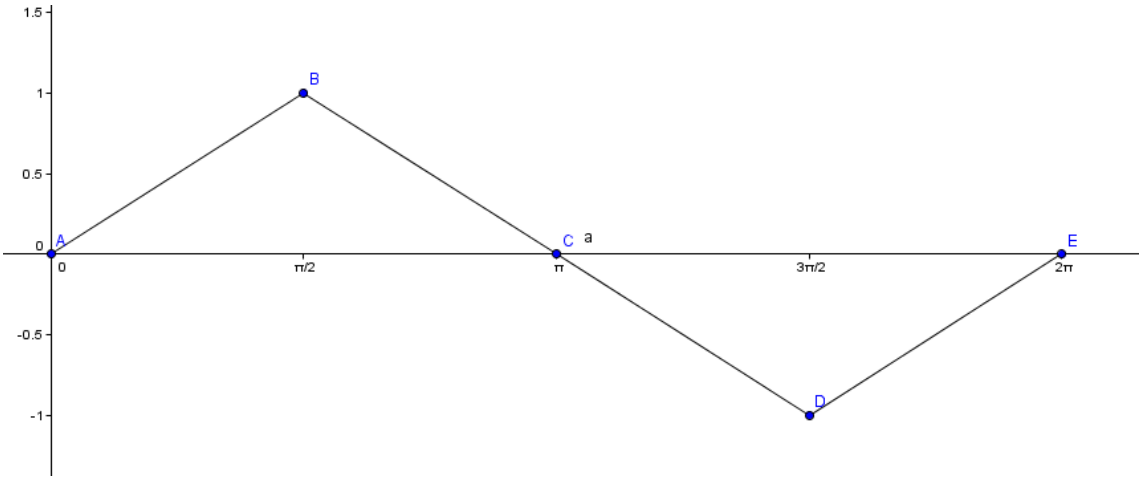


Slika 21: Primerjava grafov funkcij $\sin_2(x) = \sin(x)$, $\sin_3(x)$, $\sin_4(x)$ in $\sin_8(x)$.

[2] Oznake funkcijskih predpisov smo povzeli po oznakah za logaritemsko funkcijo pri poljubni osnovi. V teh oznakah je seveda $\sin_2(x) = \sin(x)$, $\cos_2(x) = \cos(x)$, $\sin_1(x) = \mathrm{sinq}(x)$, $\cos_1(x) = \mathrm{cosq}(x)$. Za funkcijo tangens pa velja: $\tan_n(x) = \tan(x)$.

11. "Cik-cak" sinus

V tem razdelku si zastavimo vprašanje, kako bi izpeljali enačbo krivulje, na kateri bi po običajni poti definirali funkcijo sinus (kot ordinato točke na presečišči premičnega kraka kota in krivulje), če imamo dano enačbo sinusne krivulje. Vzemimo primer lomljenke, ki jo bomo poimenovali »cik-cak sinus« (glej sliko 22). Poiskali bomo parametrično enačbo krivulje, parameter bomo označili z *u*.



Slika 22: Graf sinusa »cik-cak«

Iz slike 20 lahko odčitamo, da je smerni koeficient premice nosilke daljice AB enak:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{2}{\pi}$$

Sinus iskane krivulje je enak ordinati točke, ki leži na presečišču krivulje in gibljivega kraka kota, zato velja:

$$\sin \alpha = y = \frac{2}{\pi} u$$

Da določimo enačbo krivulje, potrebujemo še enačbo za x oziroma za kosinus. Pomagajmo si s pravokotnim trikotnikom, ki ga tvorijo koordinatno izhodišče, presečišče krivulje in gibljivega kraka kota ter projekcija te točke na x os (primerjaj sliko 17).

Za kot α lahko zapišemo:

$$\tan \alpha = \frac{sinus}{kosinus}$$

Iz tega sledi:

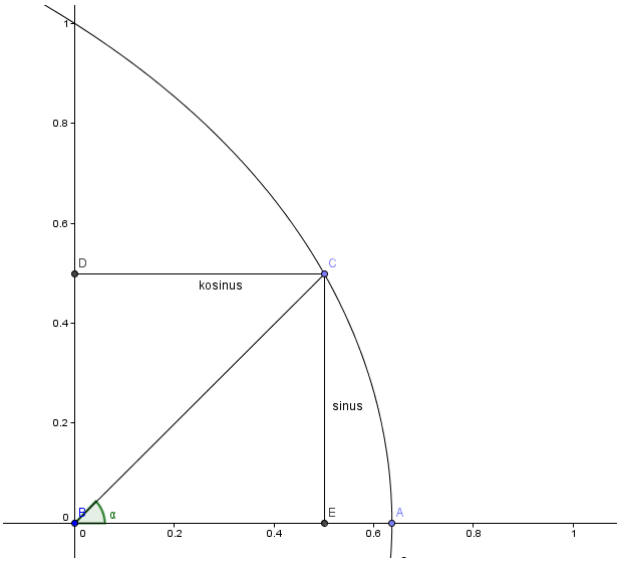
$$x = kosinus = \frac{sinus}{\tan\alpha} = \frac{2u}{\pi\ \tan\alpha}$$

Dobili smo parametrično enačbo krivulje:

$$y(u) = \frac{2u}{\pi}$$

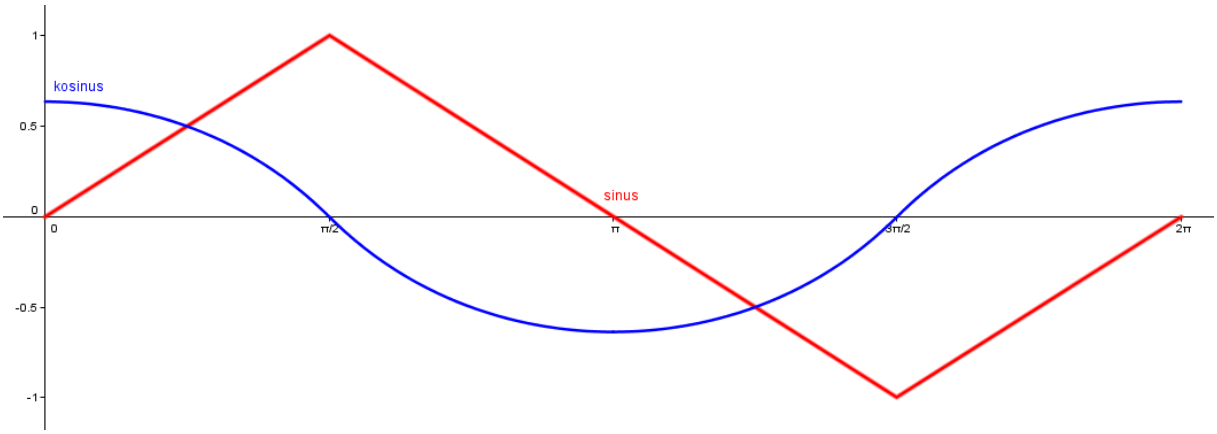
$$x(u) = \frac{2u}{\pi \tan u}$$

Enačba velja samo v prvem kvadrantu. Krivulja je narisana na sliki 23.



Slika 23: Slika krivulje glede na »cik-cak sinus«

Če na isti krivulji narišemo graf funkcije kosinus, dobimo zanimivo krivuljo, ki ni premaknjeni »cik-cak« sinus (glej sliko 24).



Slika 24: Slika kosinusa, ki ustreza »cik-cak sinusu«

12. Primeri uporabe sunusa in kosinusa quadraticus

12.1. Substitucija v nedoločenem integralu

Izračunajmo nedoločeni integral funkcije f(x) $= \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3}$

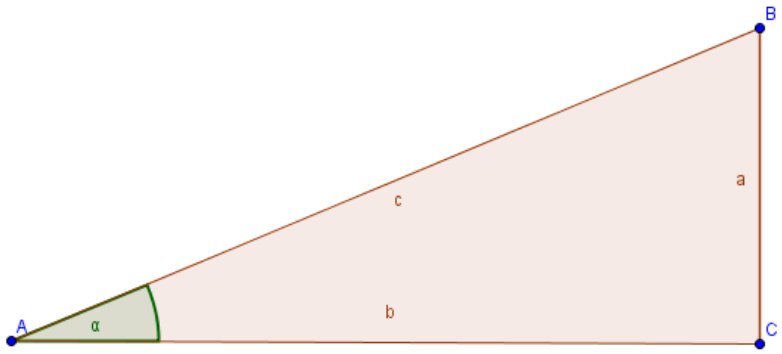
$$\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \cdot \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx = *$$

$$Substitucija: t = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \text{sinq}\, x \qquad dt = \text{sinq}'x\, dx = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$* = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\text{sinq}^2 x}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2(\sin x + \cos x)^2} + C$$

12.2. Razreševanje nekaterih trikotnikov

Primer 1: V pravokotnem trikotniku znaša kot α= 30°, vsota katet pa znaša 8 cm. Izračunaj dolžino katete a. (Glej sliko 25.)



Slika 25: Slika pravokotnega trikotnika k primeru 1

Rešitev z običajnimi kotnimi funkcijami:

$$\tan\alpha = \frac{a}{8-a}$$

$$8\tan\alpha - b\tan\alpha = a$$

$$a + a\tan\alpha = 8\tan\alpha$$

$$a\,(1+\tan\alpha) = 8\tan\alpha$$

$$a = \frac{8\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

$$a = \frac{8\tan 30°}{1+\tan 30°}$$

$$a = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$a = -4 + 4\sqrt{3}$$

Rešitev s kvadratičnimi funkcijami:

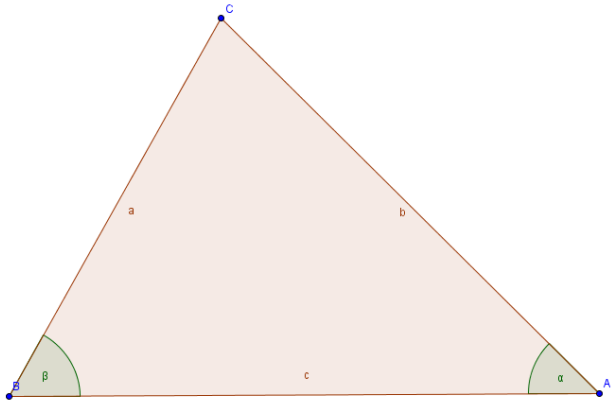
$$\text{sinq}\,\alpha = \frac{a}{a+b}$$

$$a = (a + b)\text{sinq}\ \alpha$$

$$a = 8 \cdot (\frac{-1 + \sqrt{3}}{2})$$

$$a = -4 + 4\sqrt{3}$$

Primer 2: V trikotniku meri kot α=45°, drugi kot pa β=60°. Dolžina stranice c znaša 8 cm. Kolikšna je ploščina trikotnika? (Glej sliko 26.)



Slika 26: Slika pol-pravokotnega trikotnika k primeru 2 (kot BAC = 45⁰)

Rešitev s kvadratičnimi funkcijami:

$$\text{sinq}\ \alpha = \frac{v_c}{c} = \frac{v_c}{8}$$

$$v_c = 8 \cdot \text{sinq}\ 60°$$

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$S = \frac{8 \cdot 8\text{sinq}\ 60°}{2}$$

$$S = 48 - 16\sqrt{3}$$

Opomba: V prilogi 1 je tabela s 15. mestnimi vrednostmi sinusa in kosinusa quadraticus za kote v prvem kvadrantu s korakom 1 stopinja.

13. Zaključki

V nalogi smo definirali kotne funkcije na enotskem kvadratu in definirali »nove kotne funkcije«, ki smo jih imenovali kvadratične funkcije ali funkcije quadraticus. Ugotovili smo, da so osnovne lastnosti zelo podobne običajnim trigonometričnim funkcijam, ki so definirane na enotski krožnici. Zveze med njimi in njihovi adicijski izreki pa so precej drugačni.

Menimo, da bi bilo nalogo mogoče še nadgraditi. Predlagamo naslednje možnosti:

- raziskati definicije kotnih funkcij na superelipsah,
- raziskati definicije kotnih funkcij na poljubni konveksni krivulji,
- odkriti še druge primere uporabe, na primer zveze, ki so enakovredne sinusnemu in kosinusnemu izreku.

14. Viri in literatura

[1] Pavlič, G. [et. al.]: *Spatium novum, matematika za gimnazije*, Modrijan, Ljubljana, 2013.

[2] GeoGebra User Forum, Graph out of parts of other graphs, 2014, [online], [citirano 27.1.2015] Dostopno na spletnem naslovu: http://forum.geogebra.org/viewtopic.php?t=21974&p=71819

15. Priloga

Tabela s 15. mestnimi vrednostmi sinusa in kosinusa quadraticus za kote v prvem kvadrantu s korakom 1 stopinja.

Kot^0		Sinus quadraticus	Kosinus quadraticus	
0		0.0	1.0	
1		0.017155612596463	0.982844387403537	
2		0.033742456931169	0.966257543068831	
3		0.049797977851080	0.950202022148920	
4		0.065356631091887	0.934643368908113	
5		0.080450184411360	0.919549815588640	
6		0.095107983402496	0.904892016597504	
7		0.109357186746641	0.890642813253359	
8		0.123222974948603	0.876777025051397	
9		0.136728735997320	0.863271264002681	
10		0.149896230895145	0.850103769104855	
11		0.162745741578787	0.837254258421213	
12		0.175296203401245	0.824703796598755	
13		0.187565324045336	0.812434675954664	
14		0.199569690486220	0.800430309513780	
15		0.211324865405187	0.788675134594813	
16		0.222845474273616	0.777154525726384	
17		0.234145284169261	0.765854715830739	

18		0.245237275252786	0.754762724747214	
19		0.256133705717069	0.743866294282931	
20		0.266846170922501	0.733153829077499	
21		0.277385657345732	0.722614342654268	
22		0.287762591895198	0.712237408104802	
23		0.297986887082422	0.702013112917578	
24		0.308067982482292	0.691932017517708	
25		0.318014882866899	0.681985117133101	
26		0.327836193355167	0.672163806644833	
27		0.337540151883547	0.662459848116453	
28		0.347134659270670	0.652865340729330	
29		0.356627307120596	0.643372692879404	
30		0.366025403784439	0.633974596215561	
31		0.375335998578410	0.624664001421590	
32		0.384565904437218	0.615434095562782	
33		0.393721719164989	0.606278280835011	
34		0.402809845431141	0.597190154568859	
35		0.411836509645767	0.588163490354233	
36		0.420807779837732	0.579192220162268	
37		0.429729582648804	0.570270417351196	
38		0.438607719548548	0.561392280451452	
39		0.447447882367162	0.552552117632838	
40		0.456255668237038	0.543744331762962	
41		0.465036594028245	0.534963405971755	
42		0.473796110358479	0.526203889641521	
43		0.482539615254126	0.517460384745874	
44		0.491272467535891	0.508727532464109	
45		0.5	0.5	
46		0.508727532464109	0.491272467535891	
47		0.517460384745874	0.482539615254126	
48		0.526203889641521	0.473796110358479	
49		0.534963405971755	0.465036594028245	
50		0.543744331762962	0.456255668237038	
51		0.552552117632838	0.447447882367162	
52		0.561392280451452	0.438607719548548	
53		0.570270417351196	0.429729582648804	
54		0.579192220162268	0.420807779837732	

55		0.588163490354232	0.411836509645768	
56		0.597190154568859	0.402809845431141	
57		0.606278280835011	0.393721719164989	
58		0.615434095562782	0.384565904437218	
59		0.624664001421590	0.375335998578410	
60		0.633974596215561	0.366025403784439	
61		0.643372692879404	0.356627307120596	
62		0.652865340729330	0.347134659270670	
63		0.662459848116453	0.337540151883547	
64		0.672163806644833	0.327836193355167	
65		0.681985117133101	0.318014882866899	
66		0.691932017517708	0.308067982482292	
67		0.702013112917578	0.297986887082422	
68		0.712237408104802	0.287762591895198	
69		0.722614342654268	0.277385657345732	
70		0.733153829077499	0.266846170922501	
71		0.743866294282931	0.256133705717069	
72		0.754762724747214	0.245237275252786	
73		0.765854715830739	0.234145284169261	
74		0.777154525726385	0.222845474273615	
75		0.788675134594813	0.211324865405187	
76		0.800430309513780	0.199569690486220	
77		0.812434675954664	0.187565324045336	
78		0.824703796598755	0.175296203401245	
79		0.837254258421213	0.162745741578787	
80		0.850103769104855	0.149896230895145	
81		0.863271264002680	0.136728735997320	
82		0.876777025051397	0.123222974948603	
83		0.890642813253359	0.109357186746641	
84		0.904892016597504	0.095107983402496	
85		0.919549815588640	0.080450184411360	
86		0.934643368908113	0.065356631091887	
87		0.950202022148920	0.049797977851080	
88		0.966257543068831	0.033742456931169	
89		0.982844387403537	0.017155612596463	
90		1.0	0.0	